REVISTA IBERO-AMERICANA de Educación de Educação

Una aproximación no rutinaria a la representación gráfica de las parábolas

Minnaard, Claudia
Universidad Nacional de Lomas de Zamora, Buenos Aires, Argentina
Condesse, Viviana
Universidad de Buenos Aires - Universidad Nacional de Lomas de Zamora, Buenos Aires, Argentina

10-12-03

Introducción

El conocimiento se describe como un conjunto de estructuras internas que existen en la mente de cada ser humano y que están interrelacionadas. Se acepta que existe un conjunto de representaciones mentales internas de ese conocimiento. Las matemáticas se aprenden cuando se adicionan y conectan elementos a las estructuras internas de conocimiento o cuando se reorganiza una estructura ya existente. Hiebert,J. & Carpenter,T.(1992)

Es conveniente que cada aprendizaje se vaya completando y perfeccionando a través de sucesivas aproximaciones, cada vez más profundas, desde diferentes perspectivas y en diferentes oportunidades, en la medida en que el desarrollo intelectual del alumno lo permita. Varela,L. et al.(1996)

La modelización matemática, entendida como la reconstrucción de significados que dan forma a las situaciones que crean los alumnos y que participan en ellas, es una construcción original que utiliza material conocido, por ejemplo las ideas y concepciones compartidas por los participantes.

Los elementos didácticos de esta nueva perspectiva ponen en juego relaciones entre diferentes contextos, por ejemplo el algebraico y el gráfico : identificando coeficientes, reconociendo patrones de comportamiento, buscando tendencias y estableciendo relaciones entre las funciones. Cordero, F. (2001)

Nuestra propuesta consiste en representar parábolas utilizando segmentos. Las parábolas son obtenidas con segmentos que conectan dos puntos en movimiento. A medida que uno de los puntos cambia su posición sobre uno de los segmentos, el otro punto hace lo propio sobre el segundo segmento. Cuando los segmentos determinados por los puntos móviles son trazados en sucesión queda formada una parábola. Cada segmento es tangente a la parábola.

Los alumnos pueden dibujar distintas situaciones para generar una parábola y aprender distintas propiedades que se desprenden del gráfico.

Desarrollo

La experiencia se realizó con 53 alumnos de tercer año de polimodal, de los cuales 23 corresponden a la modalidad Ciencias Naturales, y 30 a la modalidad Economía y Gestión de las Organizaciones. Dichos alumnos tienen una edad promedio de 17 años, asisten a una escuela cooperativa de gestión privada del Gran Buenos Aires, sin ninguna particularidad especial y pertenecen al turno matutino. Los grupos no fueron asignados en forma aleatoria, si no con los alumnos presentes en cada uno de los cursos.

El trabajo se llevó a cabo a través de una serie de actividades específicas; la primera de ellas se centró en un trabajo fundamentalmente gráfico, ya que tenía por objetivo indagar sobre el reconocimiento que los estudiantes tenían sobre "figuras", en especial sobre parábolas.

En una segunda serie se ubicaron las diferentes parábolas sobre el mismo sistema de ejes cartesianos y el objetivo fundamental fue traducir al lenguaje algebraico (o simbólico) lo que hasta el momento sólo existía en el lenguaje gráfico. Un cuestionario complementó la tarea, mediante el cual se buscó que reconozcan simetría de puntos equidistantes del vértice, como así también las diferentes concavidades.

En una tercera etapa, mediante el uso de papel de calcar, se realizaron distintas traslaciones: primero sobre el eje Y, luego sobre el eje X , y finalmente sobre ambos ejes, debiendo nuevamente traducir al lenguaje simbólico lo expresado mediante gráficos. Esta etapa del trabajo tenía por objetivo que el alumno expresara en forma canónica la fórmula correspondiente a cada parábola.

Finalmente, se les planteó a los alumnos la búsqueda de conclusiones al variar las condiciones iniciales de la actividad propuesta.

A continuación presentamos la actividad propuesta a los alumnos, anexando algunos comentarios y el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes

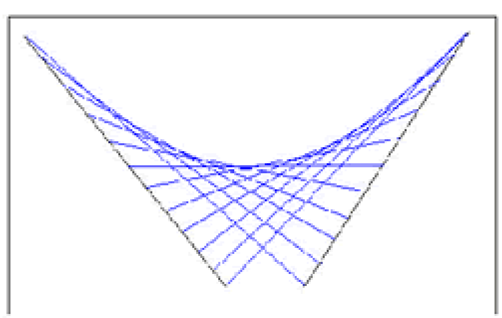
Actividad propuesta

"Para realizar la siguiente actividad necesitarás: papel de calcar, lápiz, regla y una hoja de carpeta"

1- Dibuja en la hoja de calcar un segmento y una recta que no sea ni paralela ni perpendicular al segmento y sin puntos de intersección con él.
2- Subdivide el segmento en no menos de 16 segmentos congruentes.
3- Dobla la hoja por la recta dibujada y calca el segmento; ¿qué nombre reciben estos segmentos?
4- Teniendo en cuenta uno de los dos posibles sentidos sobre el segmento, une la primera subdivisión del segmento A con la última del A'; la segunda del A con la penúltima del A'; y así sucesivamente. hasta completar todas las subdivisiones
5- ¿Qué figuras obtienes?
6- Repite el mismo procedimiento pero:
  i- variando la posición del segmento y la recta, pero manteniendo las condiciones establecidas en el punto 1
  ii- que la recta y el segmento tengan un punto de intersección
  ¿Obtienes la misma figura?
7- Dibuja en tu hoja un sistema de ejes cartesianos
8- Ubica una de las parábolas de tal forma que el vértice coincida con el centro de coordenadas y el eje de simetría con el eje de ordenadas .
9- Marca puntos sobre la parábola, dando las respectivas coordenadas
10- ¿Qué particularidad encuentras con los puntos que están ubicados a igual distancia del vértice?
11- Intenta buscar la fórmula de la función que la define
12- Repite los pasos 8-9 y 11 con las restantes parábolas
13- ¿Qué sucede si orientamos los ejes de manera exactamente opuesta?
14- ¿Cuáles son las fórmulas que definen a cada función ahora?
15- Analiza la concavidad en cada caso
16- Traslademos ahora cada parábola, utilizando siempre el mismo sistema de ejes, de tal forma que el vértice quede ubicado:
  a) en el punto (2,0).
  b) en el punto (3,0)
  c) en el punto (-1,0)
  d) en el punto (0,3)
  e) en el punto (0,-1)
  f) en el punto (3,-1)
  g) en el punto (-1,3)
  h) en el punto (-2,5)
  ¿Cuál es la fórmula que define a cada una de las funciones en cada caso?

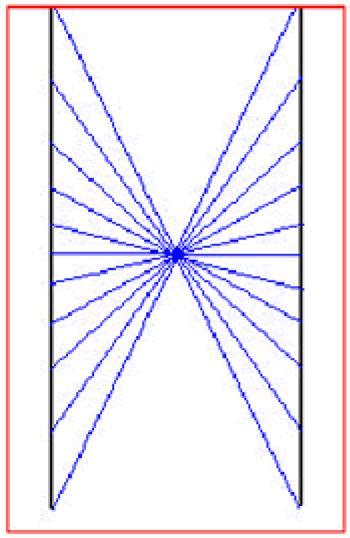
17- Al comenzar nuestra actividad hemos dado condiciones específicas para graficar el segmento y la recta. ¿Qué posiciones particulares puede tomar la recta con respecto al segmento?. Realiza las experiencias señaladas por los apartados 2,3 y 4 ¿obtienes en estos casos nuevamente una parábola?

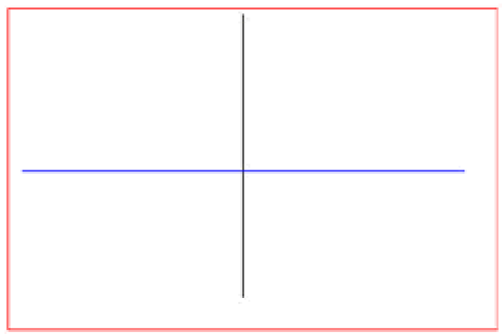
Mostraremos aquí algunas de las figuras obtenidas por los alumnos que realizaron la actividad en forma correcta :



Al cambiar las condiciones (inciso 17) los gráficos obtenidos fueron:

REVISTA IBERO—
—AMERICANA de Educación de Educação





Análisis y comentarios de los Resultados

Los estudiantes mostraron en general, una interpretación adecuada de los términos utilizados, aunque fue necesario discutir y aclarar conceptos tales como "congruente". El reconocimiento de la parábola fue unánime.

En la segunda etapa del trabajo, los alumnos evidenciaron sus primeras dudas al dibujar ejes cartesianos a posteriori de las representaciones gráficas, tarea poco común en el aula. Inducidos a elegir en forma personal e individual una escala conveniente, surgió un problema aún mayor: la expresión de la fórmula de la función cuya gráfica está realizada. Si bien el estudiante está familiarizado con el uso del lenguaje simbólico, su utilización habitual es el pasaje del simbólico al gráfico y no en forma inversa como planteamos en esta actividad.

No surgieron dudas con respecto a la concavidad, y si bien no fue posible en la gran mayoría de los alumnos el uso del término "simétricos", sí lo fue el concepto que implica.

a) Reconocimiento del modelo.
El 100% de los alumnos reconocieron que el modelo que quedaba graficado era una parábola.

b) Reconocimiento del modelo cambiando las condiciones.
El 100% de los alumnos mantuvo el reconocimiento del modelo cambiando las condiciones.

c) Determinación de las coordenadas de puntos marcados sobre la parábola.

Encuentran puntos marcados sobre la parábola	37%

Encuentran puntos marcados sobre la parábola consultando a la profesora	63%
No encuentran puntos marcados sobre la parábola	0%

d) Reconocimiento de la simetría de puntos pertenecientes a la parábola equidistantes del vértice.

Reconocen simetría	58%
No reconocen simetría	42%

e) Traducción del lenguaje gráfico al algebraico:

Sí	*Por simple observación*	55%
	Por cálculo de coeficientes por despeje	35%
No		10%

f) Reconocimiento los cambios modificando la orientación de los ejes

Reconocen los cambios	75%
No reconocen los cambios	25%

g) Reconocimiento de las modificaciones que sufre la fórmula

Reconocen modificaciones en la fórmula	63%
No reconocen modificaciones	27%

h) Reconocimiento de la concavidad de la parábola.

Reconocen la concavidad	80%
No reconocen la concavidad	20%

En la tercera etapa, al realizar las sucesivas traslaciones a lo largo de los ejes, la primera observación que se pretendía lograr es la invarianza del coeficiente del término cuadrático, que "no" en todos los casos se logró. Desde este punto de partida, las traslaciones sobre el eje Y se realizaron prácticamente sin dificultad, aumentando paulatinamente al trasladarse el vértice sobre el eje X, y aun más cuando el vértice se ubica en cualquier punto del plano. Al variar las condiciones iniciales, si bien reconocieron que no es posible obtener una parábola, muy pocos alumnos lograron identificar la función valor absoluto.

i) Traducción del lenguaje gráfico al algebraico al trasladar la parábola

Pudieron traducir del lenguaje gráfico al algebraico al trasladar la parábola	*Solo sobre el eje Y*	33%
	Solo sobre el eje X	12%
	Sobre ambos ejes	5%
No pudieron traducir del lenguaje gráfico al algebraico al trasladar la parábola		50%

Conclusiones

Las respuestas dadas por los alumnos indican un alto grado de dificultad para expresar en forma simbólica algo expresado en el lenguaje gráfico. Los profesores habitualmente trabajamos con el lenguaje simbólico (fundamentalmente cuando hablamos de funciones) y pedimos a nuestros alumnos que transfieran la situación a un lenguaje gráfico. Algunas veces, de un lenguaje coloquial, solicitamos su transferencia al simbólico, para luego representar gráficamente; pero, ¿cuántas veces pedimos una transferencia del lenguaje gráfico al algebraico? ¿y del gráfico al coloquial?

Si bien el grupo de alumnos con el que se llevó a cabo la actividad, había trabajado en años anteriores con funciones cuadráticas, no lo había hecho en la forma canónica, así que además de presentar esta curva a través de segmentos, nos propusimos hacer hincapié en las coordenadas del vértice para expresarla en forma canónica, abandonando la importancia que hasta ese momento se le atribuía a las raíces y por lo tanto, a la expresión polinómica de la función.

Queremos desde aquí agradecer su cooperación a los alumnos y alumnas de 3º de "Economía y Gestión" y 3º de "Ciencias Naturales" (Promoción 2003) cuyos trabajos son el sustrato para este artículo.

Bibliografía

Cordero,F.(2001).La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(2), pp.118-119. México: Thomson Learning.

Flores,A.(2002). Interactive String Parabolas. Online Journal of School Mathematics. National Council Teaching Mathematics. En Internet: http://my.nctm.org/eresources/view_article.asp?article_id=2074

Hiebert,J. & Lefebre,P.(1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J.Hiebert (Ed), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp.1-27). Hillsdale,NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Varela,L. ;Guasco,M.J. ;Gerompini,A. & Martello,S.(1996). Matemática - Metodología de la Enseñanza.(pp.136). PROCIENCIA-Conicet.