

MEZCLA DE ONDAS EN MATERIALES FOTORREFRACTIVOS

Luis Joaquin Mendoza Herrera

Universidad de Pamplona
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Física
Maestría en Física
2009

MEZCLA DE ONDAS EN MATERIALES FOTORREFRACTIVOS

Luis Joaquin Mendoza Herrera

Director
Dr. Jorge Enrique Rueda

Trabajo de Grado presentado para optar al título de Magister en Física

Universidad de Pamplona
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Física
Maestría en Física

A mi hijo Luis Helian Mendoza Mojica, a mi gran amor y esposa Ruth Dary Mojica Sepulveda, A mi madre Dellamira Herrera Cera por su gran amor y apoyo incondicional y a mi padre Luis Miguel Mendoza Buelvas, por todas la cosas que me ha enseñado de la vida y a la persona que mas me a apoyado en todo mi Abuela Alida Buelvas Rodriguez

AGRADECIMIENTOS

Es muy difícil efectuar una lista de agradecimientos a tantas personas que me han acompañado en este proceso de formación y de seguro se me escaparan algunas personas a las cuales les ruego me disculpen, agradezco a mi director de grado el Dr. Jorge Enrique Rueda Parada director del grupo de investigación Óptica Moderna, A mis hermanos(Pedro, Miguel Angel, Bettys),a mis suegros(Heli Mojica y Alicia Sepulveda) y cuñadas(Fanny, Yolima y Mildreth), que son unos bacanes, a mis compañeros de estudio y trabajo (Ariel Becerra, German Contreras, Claudia Patricia Parra, Romulo Sandobal, Flor Alba Vivas, Luis Guerra, Lina Mirella, Ana Ludia, Ramon Portilla, Jaime Pinto, Alvaro Herrera, Juan Manuel Molina, German, Jesús Duran, Marcos Celi, Andrés Americo), y todas las personas que de manera directa o indirecta colaboraron en este proceso.

LISTA DE SIMBOLOS

N	Concentración de portadores.
N_D^+	Iones donores en ausencia de luz.
N_A^-	Iones aceptores en ausencia de luz.
N_D	Número total de donores.
s	Sección transversal de fotoionización.
β	Rata de generación térmica.
γ_R	Constante de recombinación.
\vec{E}	Campo eléctrico de la luz.
\vec{E}	Campo eléctrico de carga espacial.
e	Carga del electrón.
k	Constante de Boltzmann.
p	Constante fotovoltaica.
I	Intensidad.
ϵ	Permitividad.
μ	Permeabilidad.
T	Temperatura absoluta.
J	Densidad de Corriente.
ω_i	Frecuencia de las ondas incidentes.
\vec{k}_i	Vector de onda de las ondas incidentes.
A_i, S_i	Amplitud de ondas eléctricas.
Λ	Periodo de red.
K	Vector de red.
τ_d	Tiempo de relajación del dieléctrico.
E_D	Campo de difusión.
E_M	Campo de Movilidad.
E_{q0}	Campo de Saturación.
E_{ph}	Campo fotovoltaico.
E_w	Campo de carga espacial normalizado.
m	Modulación.
Ω	Diferencia de las frecuencias de las ondas incidentes.
ϕ	Fase entre la red de índices y el patrón de franjas.
ϵ_{r0}	tensor de permitividad relativa.

ϵ'_{r0}	parte real del tensor de permitividad relativa.
ϵ''_{r0}	parte imaginaria del tensor de permitividad relativa.
g	Actividad óptica.
α	Atenuación.
r	Tensor electroóptico.
θ	Ángulo de incidencia de las ondas.
λ	Longitud de onda de la luz.
G	Ganancia.
L	Ancho del cristal.
T_i	Transmitancia.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	II
LISTA DE SIMBOLOS	III
ÍNDICE GENERAL	V
ÍNDICE DE FIGURAS	VII
ÍNDICE DE TABLAS	IX
INTRODUCCION	X
1 Efecto Fotorrefractivo	1
1.1 Modelo de Kukhtarev-Vinetskiis	2
1.1.1 Solución lineal del modelo(igual frecuencia)	4
1.1.2 Solución lineal del modelo (diferentes frecuencias)	8
2 Mezcla de dos ondas	11
2.1 Mezcla de dos ondas para frecuencias iguales	11
2.1.1 Ondas Codireccionales	14

2.1.2 Ondas Contradireccionales	19
2.2 Influencia de la polarización en la Mezcla de dos ondas	24
3 Mezcla de N ondas en un medio Fotorrefractivo	34
3.1 Mezcla de cuatro ondas con frecuencias diferentes	34
3.2 Mezcla de N ondas con frecuencias diferentes	45
3.3 Funcionamiento del software utilizado para la mezcla de N ondas	51
4 CONCLUSIONES	54
BIBLIOGRAFIA	55

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Modelo de bandas para el efecto fotorrefractivo	2
1.2	Variación del campo de carga espacial con el periodo de red para diferentes valores del campo aplicado	8
1.3	Variación del campo de carga espacial con el periodo de red para diferentes valores del campo aplicado	9
2.1	Esquema para la mezcla de dos ondas para rayos codireccionales, donde L es la longitud del cristal fotorrefractivo	14
2.2	Variación de la intensidad I_1 para ondas codireccionales, con $\alpha = 0,02cm^{-1}$ y $\zeta = -10cm^{-1}$	17
2.3	Variación de la intensidad 2 para ondas codireccionales, con $\alpha = 0,02cm^{-1}$ y $\zeta = -10cm^{-1}$	18
2.4	Diferencia de fases para ondas codireccionales, con $\beta/\zeta = 0,2$, $\zeta = -10cm^{-1}$	19
2.5	Esquema para la mezcla de dos ondas para rayos contradireccionales, donde L es la longitud del cristal fotorrefractivo	20
2.6	Intensidad de la mezcla de ondas contradireccionales, para $I_1(0) = 1$, $I_2(L) = 1$, $\zeta = -10cm^{-1}$, $\alpha = 1,6cm^{-1}$ y $L = 0,25cm$	23
2.7	Diagrama para la mezcla de dos ondas en un cristal fotorrefractivo considerando la polarización de las ondas	25

2.8	mezcla de dos ondas codireccionales, considerando la influencia de la polarización (a) $\theta = 30^\circ$, $ A_s ^2 = 1$, $ B_s ^2 = 0,1$, $ A_p ^2 = 0$ y $ B_p ^2 = 0$, (b) $\theta = 12^\circ$, $ A_s ^2 = 1$, $ B_s ^2 = 0,1$, $ A_p ^2 = 0$ y $ B_p ^2 = 0$, (c) $\theta = 30^\circ$, $ A_s ^2 = 0,75$, $ B_s ^2 = 0,0075$, $ A_p ^2 = 0,25$ y $ B_p ^2 = 0$ y (d) $\theta = 12^\circ$, $ A_s ^2 = 0,75$, $ B_s ^2 = 0,0075$, $ A_p ^2 = 0,25$ y $ B_p ^2 = 0$	31
2.9	mezcla de dos ondas contra-direccionales para $\theta = 30^\circ$, $A_p(0) = B_p(0) = 0$, $c_2/c_1 = 0,1$	32
2.10	intensidad total para la mezcla contradireccional con $\theta = 30^\circ$, $A_p(0) = B_p(0) = 0$, $c_2/c_1 = 0,1$	33
3.1	Esquema de la incidencia de N ondas sobre el cristal fotorrefractivo . . .	35
3.2	Mezcla de cuatro ondas para $\left \frac{S_0}{S_{-1}}\right ^2 = 400$, $S_{+1} = 0$ y $S_{+2} = 0$, con: a) $\theta = 0,2$, $L_0 = 12\text{mm}$ y $E_0 = 15 \text{KV/cm}$, b) $\theta = 0,3$, $L_0 = 12\text{mm}$ y $E_0 = 15\text{KV/cm}$, c) $\theta = 0,3$, $L_0 = 15\text{mm}$ y $E_0 = 15\text{KV/cm}$ y d) $\theta = 0,3$, $L_0 = 15\text{mm}$ y $E_0 = 20\text{KV/cm}$	40
3.3	Mezcla de cuatro y cinco ondas para $\left \frac{S_0}{S_{-1}}\right ^2 = 400$, $S_{+1} = 0$ y $S_{+2} = 0$, con a) $\theta = 0,2$, $\delta\omega = 1$, b) $\theta = 0,2$, $\delta\omega = 0,5$, c) $\theta = 0,3$, $\delta\omega = 0,5$ y d) $\theta = 0,2$, $\delta\omega = 0,01$	42
3.4	Mezcla de seis ondas con una longitud del cristal $L_0 = 10\text{mm}$, con a) $r = 4 \times 10^{12}$, $\epsilon_s = 56$ y $T = 300^\circ\text{K}$, b) $r = 6 \times 10^{12}$, $\epsilon_s = 56$ y $T = 300^\circ\text{K}$, c) $r = 4 \times 10^{12}$, $\epsilon_s = 28$ y $T = 300^\circ\text{K}$, y d) $r = 4 \times 10^{12}$, $\epsilon_s = 56$ y $T = 360^\circ\text{K}$	49
3.5	Mezcla de seis ondas para diferentes valores iniciales de las ondas incidentes a.) $ S_{-1} ^2 = 2,5$, $ S_0 ^2 = 0,5$, $ S_{+1} ^2 = S_{+2} ^2 = S_{+3} ^2 = S_{+4} ^2 = 0$, b) $ S_{-1} ^2 = 2,0$, $ S_0 ^2 = 1,0$, $ S_{+1} ^2 = S_{+2} ^2 = S_{+3} ^2 = S_{+4} ^2 = 0$, c) $ S_{-1} ^2 = 1,5$, $ S_0 ^2 = 1,5$, $ S_{+1} ^2 = S_{+2} ^2 = S_{+3} ^2 = S_{+4} ^2 = 0$ y d) $ S_{-1} ^2 = 1,0$, $ S_0 ^2 = 2,0$, $ S_{+1} ^2 = S_{+2} ^2 = S_{+3} ^2 = S_{+4} ^2 = 0$	50
3.6	Mezcla de diez ondas con: $\frac{S_0}{S_{-1}} = 2$, $S_{+1} \cdots S_{+8} = 0$, $\theta = 0,2$, $r = 6 \times 10^{12}$	51
3.7	Diagrama de flujo del software desarrollado para la mezcla de N ondas	52

ÍNDICE DE TABLAS

3.1	Parametros utilizados	53
-----	---------------------------------	----

INTRODUCCION

En óptica lineal el índice de refracción depende de la frecuencia de la luz; luego, sólo en este caso, se considera que la reflexión y refracción son independientes de la intensidad del haz de luz. La óptica no lineal estudia la interacción de la luz y la materia, cuando el material responde no linealmente a la amplitud del campo eléctrico de la misma luz; así, el índice de refracción del medio se puede controlar con la iluminación de un haz de luz; en otras palabras, la propagación de un haz de luz se puede manipular con luz; ello condujo a establecer una gran variedad de innovación tecnológica basada en control de luz con luz.

El efecto fotorrefractivo es un fenómeno óptico no lineal [1]-[8]; sin embargo, los fenómenos no lineales por efecto fotorrefractivo no son causados directamente por el campo eléctrico de la luz que perturba el material, como si sucede en los materiales no lineales puros; esta especial característica de los materiales fotorrefractivos permite generar efectos de orden superior con intensidades de la radiación electromagnética igual o inferior a $1\text{mW}/\text{cm}^2$ [17].

El efecto fotorrefractivo se define como el cambio local del índice de refracción, que se produce por la variación espacial de la intensidad de la luz en el interior del material. En términos microscópicos, esta radiación electromagnética espacialmente no homogénea, provoca transiciones electrónicas hacia la banda de conducción. Así, se crea una distribución de carga espacial y por ende un campo de carga espacial. Tal campo induce entonces un cambio local de índice de refracción, modulado por efecto Pockels[6]. De esta forma, es posible utilizar estos materiales como memorias ópticas, que permiten registrar-borrar-registrar y/o fijar la información [95],[96].

Los materiales $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO), LiNbO_3 y $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO) presentan fotorrefractividad y son apropiados para holografía en tiempo real, entre otras

aplicaciones, usando radiación de intensidad relativamente baja $1\text{mW}/\text{cm}^2$. En el registro de un holograma fotorrefractivo puede ocurrir acoplamiento energético entre los haces que inciden al medio y los generados en él; esta condición experimental se conoce como mezcla de ondas[1],[22].

Acoplar haces ópticos ha permitido el desarrollo de aplicaciones en óptica computacional, almacenamiento de información, procesado de imágenes, redes neuronales, generación de armónicos, auto-enfoque, amplificación óptica, conjugación de fase, síntesis óptica de circuitos lógicos, acopladores, multiplexado de información, modulares óptico-electrónicos, metrología óptica de alta resolución y correladores ópticos, entre otras aplicaciones[48]-[91].

Este documento describe la física del efecto fotorrefractivo, iniciando con una explicación del fenómeno, donde se muestran las ecuaciones que lo describen, y la obtención de los campos de carga espacial, a partir de los cuales se obtiene la variación del índice de refracción, esto se analizara en los casos de igual frecuencia y diferente frecuencia de las ondas de luz incidentes, está variación del índice de refracción se incluirea en la ecuación de ondas para el posterior análisis de la mezcla de dos ondas(capitulo 2), tanto en el caso coodireccional(incidencia de las ondas sobre una misma cara del cristal) como en el caso contradireccional(incidencia de las ondas de luz sobre caras opuestas del cristal), de forma similar se aborada la influencia de la polarización en la mezcla de dos ondas, para realizar un estudio más general(capitulo 4), se estudia la mezcla de cualquier numero de ondas, analizando la influencia del número de ondas, de los terminos de off Bragg, del ángulo de incidencia y otros parametros caracteristicos de las ondas incidentes y de las características del cristal fotorrefractivo, en la mezcla de varias ondas.

CAPÍTULO 1

Efecto Fotorrefractivo

El efecto fotorrefractivo es un fenómeno en el cual el índice de refracción es cambiado localmente, por una variación espacial de la intensidad de luz. Tal efecto fue descubierto en el año de 1966 por A. Ashkin[1]., et.al, cuando estudiaban las propiedades electro-ópticas de cristales ferroeléctricos, entre ellos el LiNbO_3 . La variación espacial del índice conduce a una distorsión del frente de onda, por este motivo, este efecto fue llamado efecto fotorrefractivo "daño óptico". Se ha observado desde entonces en muchos cristales electroópticos, incluyendo LiNbO_3 [3],[5], BaTiO_3 [36], BSO[28], BTO[36], entre otros[33],[40], [42],[45],[75].

Un material fotorrefractivo es fotoconductor, electro-óptico y altamente resistivo en ausencia de iluminación, dentro de los materiales fotorrefractivos se conocen cinco grupos[92]-[96].

- Ferroeléctricos: LiNbO_3 , LiTaO_3 , BaTiO_3 , KNbO_3 , SBN
- Silenitas: $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO), $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO)
- Semiconductores: GaAs:Cr, InP:Fe, CdTe
- Cerámicas piezoeléctricas: tipo PLZT
- Orgánicos: poly(N-vinylcarbazole) o PVK, poly(silane).

El fenómeno fotorrefractivo se puede explicar mediante el modelo de bandas (Figura 1.1), de la siguiente forma: En ausencia de luz, se asume la existencia de un número de iones donores N_D^+ , de iones aceptores N_A^- y un número de donores no ionizados $N_D - N_D^+$, luego se hace incidir luz, el impacto de cada fotón sobre un donor libera un electrón el cual migrara hacia la banda de conducción, en la cual se mueve mediante los mecanismos de transporte, difusión y/o drift, para luego recombinarse, ionizando con esto un donor; entonces se genera una densidad de carga espacial, la cual a su vez produce un campo eléctrico de carga espacial; éste último modulará el índice de refracción del material por efecto electro-óptico lineal, produciendo un un cambio no lineal en el índice de refracción[95],[96],[92].

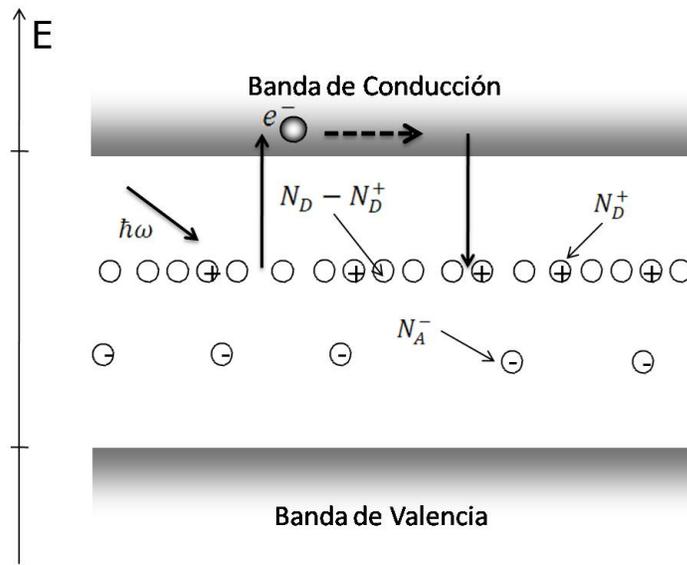


Figura 1.1: Modelo de bandas para el efecto fotorrefractivo

1.1 Modelo de Kukhtarev-Vinetskiis

Para conocer las bases teoricas que gobiernan el efecto fotorrefractivo, basandose en el modelo descrito, en la transición de electrones, se llevan donores a la banda de conducción con una probabilidad $(sI + \beta)(N_D - N_D^+)$ [8]-[10], y los donores ionizados son capturados por portadores con probabilidad $\gamma_R N N_D^+$ [8]-[10], donde, s es la sección transversal de fotoionización, β es la rata de generación térmica, γ_R es la constante de recombinación, N es la concentración de portadores y N_D^+ es la concentración de donores ionizados.

En este caso el campo de carga espacial producido por la migración $\vec{E}(\vec{r}, t)$, se obtiene del siguiente sistema de ecuaciones[92], las cuales rigen la dinámica de las densidades

de donadores ionizados y electrones:

Ecuación de continuidad: La concentración de electrones libres puede incrementarse en cualquier pequeño volumen debido a la ionización de los donadores y al flujo de electrones que entran en dicho volumen del material como consecuencia de los mecanismos de transporte.

$$\frac{\partial}{\partial t} N(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} N_D^+(\vec{r}, t) - \frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

donde e es la carga del electrón, \vec{r} es el vector de posición, t es el tiempo y $\vec{J}(\vec{r}, t)$ es la densidad de corriente eléctrica.

Generación y recombinación de carga: La concentración de donadores ionizados aumenta por ionización térmica y por fotoionización de un donador neutro, mientras que disminuye por la recombinación de un electrón con un donador ionizado.

$$\frac{\partial}{\partial t} N_D^+(\vec{r}, t) = (sI(\vec{r}, t) + \beta)(N_D - N_D^+(\vec{r}, t)) - \gamma_R N(\vec{r}, t) N_D^+(\vec{r}, t) \quad (1.2)$$

El primer término de la ecuación, es la generación de portadores por acción de la luz y por efecto térmico, en tanto que el segundo término representa la recombinación de portadores con las trampas.

Densidad de Corriente:

$$J(\vec{r}, t) = e\mu N \vec{E}(\vec{r}, t) + \mu kT \nabla N(\vec{r}, t) + pI(\vec{r}, t) (N_D - N_D^+(\vec{r}, t)) \vec{c} \quad (1.3)$$

Donde, μ es movilidad electrónica, k es la constante de Boltzmann, pI es la corriente fotovoltaica, p es la constante fotovoltaica, \vec{E} es el campo de carga espacial, \vec{E} es el campo de la luz incidente, N_A es la concentración de aceptores, \vec{c} es un vector unitario en la dirección del eje electroóptico del cristal.

El primer término del lado derecho de la ecuación, es la corriente de conducción o drift, el segundo término, es la corriente por difusión térmica, y el tercer término, es la corriente por efecto fotovoltaico.

Generación de la densidad de carga:

El campo eléctrico en el interior del material se relaciona con la densidad de carga neta mediante la ecuación de Poissons:

$$\nabla(\epsilon\vec{E}(\vec{r}, t)) = e(N_D^+(\vec{r}, t) - N_A^-) \quad (1.4)$$

donde ϵ es la permitividad dieléctrica

1.1.1. Solución lineal del modelo(igual frecuencia)

La ecuación (1.3) se puede escribir en la forma mas amplia, utilizando la corriente de desplazamiento como:

$$\begin{aligned} J_0 = & e\mu N(\vec{r}, t)\vec{E}(\vec{r}, t) + \mu kT\nabla N(\vec{r}, t) + pI(\vec{r}, t) \\ & (N_D - N_D^+(\vec{r}, t))\vec{c} + \epsilon\frac{\partial\vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Donde, J_0 es la densidad de corriente total y $\epsilon\frac{\partial\vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ es la corriente de desplazamiento. Las expresiones para cada uno de los campos de luz incidentes sobre el material fotorefractivo, se pueden escribir como:

$$\vec{E}_j = A_j e^{i(\omega t - \vec{k}_j \cdot \vec{r})} \quad j = 1, 2 \quad (1.6)$$

donde A_1, A_2 son las amplitudes de las ondas, ω es la frecuencia angular, y \vec{k}_1 y \vec{k}_2 son los vectores de onda, con un factor de proporcionalidad ϵc la intensidad producida por las ondas incidentes, puede ser escrita como

$$I = |\vec{E}| = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2| \quad (1.7)$$

donde c es la velocidad de la luz.

Utilizando la ecuación (1.6) para el campo eléctrico, la intensidad se reescribe en la forma

$$I = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1^* A_2 e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} + A_1 A_2^* e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (1.8)$$

donde

$$\vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1 \quad (1.9)$$

La magnitud del vector de onda \vec{K} es $2\pi/\Lambda$, donde Λ es el periodo del patrón de franjas. La intensidad (1.8) representa una variación espacial de la energía óptica incidente sobre el medio fotorrefractivo, la cual a su vez se puede escribir en la forma mas compacta

$$I = I_0 + Re \{ I_1 e^{-iKz} \} = I_0 + I_p \quad (1.10)$$

donde $I_0 = |A_1|^2 + |A_2|^2$, $I_p = Re \{ I_1 e^{-iKz} \}$, I_1 es un complejo de la forma $2A_1 A_2^*$, donde además se ha tomado

$$\vec{k}_1 = k(\cos\theta\hat{a}_x + \sin\theta\hat{a}_z) \quad \vec{k}_2 = k(\cos\theta\hat{a}_x - \sin\theta\hat{a}_z) \quad (1.11)$$

De las ecuaciones (1.1)-(1.4), se debe calcular el campo de carga espacial \vec{E} , el cual causa la variación local del índice de refracción, pero durante la obtención de esta campo, se deben calcular los otros parametros de estas ecuaciones, N_D^+ y N , las cuales se toman con la misma dependencia de I , en la forma

$$X(z, t) = X_0(t) + X_p(z, t) \quad (1.12)$$

donde X es cualquiera de las variables a obtener N_D^+ , \vec{E} o N , de esta forma las ecuaciones (1.2), (1.5) y (1.4) se convierten en

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(N_{D0}^+ + N_{Dp}^+) &= s(I_0 + I_p)(N_D - N_{D0}^+ - N_{Dp}^+) \\ &\quad - \gamma_R(N_0 + N_p)(N_{D0}^+ + N_{Dp}^+) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} J_0 &= e\mu(N_0 + N_p)(E_0 + E_p) + kT\mu \frac{\partial}{\partial z}(N_0 + N_p) + p(I_0 + I_p) \\ &\quad (N_D - N_{D0}^+ - N_{Dp}^+) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(E_0 + E_p) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial z}(E_0 + E_p) = e(N_{D0}^+ + N_{Dp}^+ - N_A^-) \quad (1.15)$$

Separando los términos dependientes e independientes del espacio y simplificando, en conjunto con la aproximación de segundo orden, es decir sin considerar los terminos de e^{-2iKz} , se llega al conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{D0}^+ = sI_0(N_D - N_{D0}^+) - \gamma_R N_0 N_{D0}^+ \quad (1.16)$$

$$0 = e(N_{D0}^+ - N_A^-) \quad (1.17)$$

$$J_0 = e\mu N_0 E_0 + pI_0(N_D - N_{D0}^+) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(E_0) \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{D1}^+ = sI_1(N_D - N_A^-) - (sI_0 + \gamma_R N_0)N_{D1}^+ - \gamma_R N_1 N_A^- \quad (1.19)$$

$$-iK\epsilon E_1 = eN_{D1}^+ \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} 0 = & e\mu(N_0 E_1 + N_1 E_0) - iKkT\mu N_1 + p((N_D - N_A^-)I_1 \\ & - N_{D1}^+ I_0) + \epsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.21)$$

De la ecuación (1.17) se tiene que $N_{D0}^+ = N_A^-$, las ecuaciones para N_1 y E_1 , son respectivamente

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{sI_1}{\gamma_R N_A^-} (N_D - N_A^-) + \frac{iK\epsilon}{e\gamma_R N_A^-} (sI_0 + \gamma_R N_0) E_1 + \\ & \frac{iK\epsilon}{e\gamma_R N_A^-} \frac{\partial E_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t_n} + P E_1 = m q \quad (1.23)$$

donde $m = I_1/I_0$, es la modulación y los coeficientes P , q están dados por:

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{D} \left(1 + \frac{E_D + i(E_0 + aE_{ph})}{E_q} \right), q = i \frac{E_D + i(E_0 + E_{ph})}{D} \\ D = & 1 + \frac{E_D + iE_0}{E_M} \end{aligned} \quad (1.24)$$

y la nueva variable t_n , es el tiempo normalizado definido de la forma

$$t_n = t/\tau_d \quad (1.25)$$

donde

$$\tau_d = \frac{\epsilon}{e\mu N_0} \quad (1.26)$$

τ_d es el tiempo de relajación del dieléctrico. Las características de los campos E_D , E_M , E_q y E_{ph} fueron introducidas por Kukhtarev et al. (1977)[?]-[?], los cuales están definidas en términos de todos los parámetros del material fotorrefractivo como

$$\begin{aligned} E_D &= \frac{kTK}{e}, \quad E_M = \frac{\gamma_R N_A^-}{\mu K}, \quad E_q = E_{q0}(1 - a), \quad E_{q0} = \frac{eN_A^-}{\epsilon K}, \\ a &= \frac{N_A^-}{N_D}, \quad E_{ph} = \frac{pI_0(N_D - N_A^-)}{e\mu N_0} = \frac{p}{e\mu\tau_e s} \end{aligned} \quad (1.27)$$

E_D es llamado campo de difusión, el cual es inversamente proporcional al periodo del patrón de franjas, el pequeño cambio en los espacios de red, generan un gradiente de distribución electrónica y causan las fuerzas de difusión.

El sentido físico de E_M se encuentra cuando se escribe en la forma alternativa

$$E_M \mu \tau_e = \frac{\Lambda}{2\pi} \quad (1.28)$$

donde $\tau_e = \frac{1}{\gamma_R N_A^-}$, es el tiempo de vida media de los electrones, de esta forma E_M , es el campo eléctrico necesario para desplazar un electrón una distancia $\frac{\Lambda}{2\pi}$ durante el tiempo de vida media. El campo E_{q0} es llamado campo de saturación y E_{ph} es llamado campo fotovoltaico, y es el campo medido cuando el cristal se encuentra en circuito abierto, el cual es independiente de intensidad óptica de entrada.

Cuando se toma la condición inicial $E_1(t_n = 0) = 0$, la solución de la ecuación (1.23) es de la forma:

$$E_1 = m \frac{q}{P} [1 - \exp(-Pt_n)] \quad (1.29)$$

Por conveniencia se toma el campo de carga espacial normalizado $E_w = E_1/m$. En la grafica (1.2) se muestra una grafica de la variación de este campo, en el BSO, para valores pequeños del tiempo, y diferente campos aplicados, en este caso el campo

de carga espacial normalizado, es de la forma $E_w = \frac{q}{P}t_n$, $\mu = 3 \times 10^{-6}m^2V^{-1}s^{-1}$, $\gamma_R = 1,65 \times 10^{-17}m^3s^{-1}$, $N_A^- = 10^{22}m^{-3}$, $T = 298^\circ K$, $\epsilon = 56\epsilon_0$ y $N_D = 10^{25}m^{-3}$, y en la figura(1.3) se muestra la variación de la parte imaginaria del campo de carga espacial normalizado.

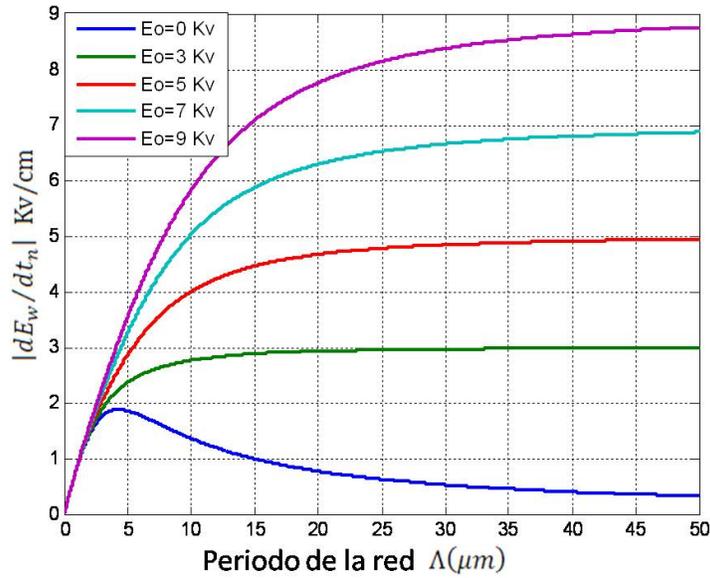


Figura 1.2: Variación del campo de carga espacial con el periodo de red para diferentes valores del campo aplicado

1.1.2. Solución lineal del modelo (diferentes frecuencias)

Si ω_1 y ω_2 , son las frecuencias de las dos ondas, entonces el campo eléctrico de las dos ondas se puede escribir como

$$E_j = A_j e^{i(\omega_j t - \vec{k}_j \cdot \vec{r})} \quad j = 1, 2 \quad (1.30)$$

donde k_1 y k_2 los vectores de onda y A_1 , A_2 son las amplitudes de los dos rayos. La intensidad de radiación de las dos ondas electromagnéticas se puede escribir como

$$I = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1^* A_2 e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} + A_1 A_2^* e^{-i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \quad (1.31)$$

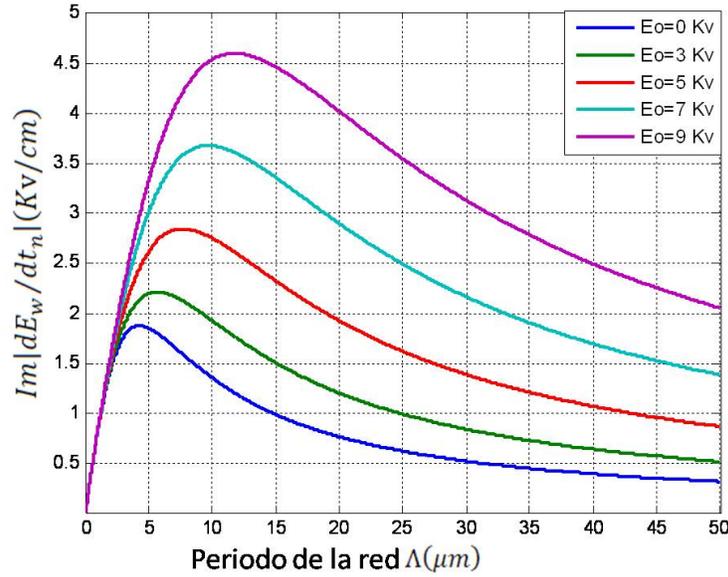


Figura 1.3: Variación del campo de carga espacial con el periodo de red para diferentes valores del campo aplicado

donde

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$$

El conjunto de ecuaciones (1.16)-(1.21), con un procedimiento similar al desarrollado en la sección anterior, pero con la diferencia de que $I_p = \text{Re} \left\{ I_1 e^{-i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right\}$ están dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{D0}^+ = s I_0 (N_D - N_{D0}^+) - \gamma_R N_0 N_{D0}^+ \quad (1.33)$$

$$0 = e(N_{D0}^+ - N_A^-) \quad (1.34)$$

$$J_0 = e \mu N_0 E_0 + p I_0 (N_D - N_{D0}^+) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (E_0) \quad (1.35)$$

$$i\Omega N_{D1}^+ + \frac{\partial}{\partial t} N_{D1}^+ = sI_1(N_D - N_A^-) - (sI_0 + \gamma_R n_0) N_{D1}^+ - \gamma_R N_1 N_A^- \quad (1.36)$$

$$-iK\epsilon E_1 = eN_{D1}^+ \quad (1.37)$$

$$0 = e\mu(N_0 E_1 + N_1 E_0) - iKkT\mu N_1 + p((N_D - N_A^-)I_1 - N_{D1}^+ I_0) + \epsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} + i\epsilon\Omega E_1 \quad (1.38)$$

La ecuación resultante para E_1 , tiene la forma (1.23), y solución de la forma (1.29), con una diferencia en la definición de P , el cual se define en la nueva forma:

$$P = \frac{1}{D} \left(1 + \frac{E_D + i(E_0 + aE_{ph})}{E_q} + \frac{i\Omega a (E_M + E_D + iE_0)}{sI_0 E_q} \right) \quad (1.39)$$

CAPÍTULO 2

Mezcla de dos ondas

Cuando dos ondas electromagnéticas coherentes inciden en un medio fotorrefractivo, se produce intercambio energético entre ellas, este fenómeno de intercambio de energía se conoce como mezcla de dos ondas, la incidencia de las ondas sobre el cristal se asume de tal forma que el bisector de los rayos está orientado en la dirección x y el ángulo entre los rayos y el bisector es θ , además se asume que las ondas están completamente polarizadas y el estado de polarización es arbitrario.

2.1 Mezcla de dos ondas para frecuencias iguales

En este caso se asume que las frecuencias de las ondas incidentes sobre el cristal son iguales, estas ondas producen un patrón de intensidad, el cual genera la variación local del índice de refracción o de la constante dieléctrica, debido al campo de carga espacial formado en el medio fotorrefractivo. Este cambio en la constante dieléctrica relativa se puede calcular de la forma

$$\Delta\epsilon_r = -\epsilon'_{r0} r E \epsilon'_{r0} \quad (2.1)$$

donde r es el tensor electroóptico, y ϵ'_{r0} es la parte real del tensor de permitividad relativa, el cual tiene la forma

$$\epsilon_{r0} = \epsilon'_{r0} - j\epsilon''_{r0} + g \quad (2.2)$$

donde, ϵ''_{r0} es la parte compleja del tensor de permitividad relativa, g es la actividad óptica, luego la variación del índice de refracción esta dada entonces como

$$\Delta n = -\frac{\Delta\epsilon_r}{2n_0} = -\frac{n_0^3}{2}rE \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta que el campo de carga espacial es en general un complejo que se puede escribir en la forma $|E_w|e^{i\phi}$

El índice de refracción en este caso está definido por:

$$n = n_0 + \frac{n_1}{2}e^{i\phi}\frac{A_1^*A_2}{I_0}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + c.c \quad (2.4)$$

donde $n_1 = n_0^3r|E_w|$, n_0 es el índice de refracción cuando no existe presencia de luz, ϕ es la fase que indica el grado en el cual la red de índices es desfasada espacialmente con respecto al patrón de interferencia de la luz. Para investigar el acoplamiento de las ondas, se introduce el índice de refracción, y el campo en la siguiente ecuación de ondas

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{E}) - \frac{\omega^2}{c^2}n^2\tilde{E} = 0 \quad (2.5)$$

Asumiendo entonces que $\nabla \cdot \tilde{E} = 0$, y realizando los respectivos cálculos se llega a

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \tilde{E}) &= -\nabla^2\tilde{E}_1 - j\vec{k}_1 \times (\nabla \times \tilde{E}_1) - j\nabla \times (\vec{k}_1 \times \tilde{E}_1) \\ &\quad -\vec{k}_1 \times (\vec{k}_1 \times \tilde{E}_1) - \nabla^2\tilde{E}_2 - j\vec{k}_2 \times (\nabla \times \tilde{E}_2) \\ &\quad -j\nabla \times (\vec{k}_2 \times \tilde{E}_2) - \vec{k}_2 \times (\vec{k}_2 \times \tilde{E}_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donde se ha utilizado la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \tilde{E}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \tilde{E}) - \nabla^2\tilde{E}$.

Tomando un campo eléctrico perpendicular a la dirección de propagación, se pueden simplificar para obtener

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \tilde{E}) &= -\nabla^2\tilde{E}_1 - \nabla^2\tilde{E}_2 + k_1^2\tilde{E}_1 + k_2^2\tilde{E}_2 - \\ &\quad 2jk_1\cos(\theta)\frac{\partial\tilde{E}_1}{\partial r} - 2jk_2\cos(\theta)\frac{\partial\tilde{E}_2}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.7)$$

el segundo término de la ecuación de ondas (2.5) se puede escribir como:

$$-\omega^2\mu_0(-\epsilon'_{r0}r[\vec{E}_0 + (\vec{E}_w\frac{A_1^*A_2}{I_0} + c.c)\epsilon'_{r0}] + [\epsilon'_{r0} - j\epsilon''_{r0} + g])(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2) \quad (2.8)$$

Agrupando los términos que contienen $e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})}$ y $e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})}$, y además sin tomar en cuenta los términos de orden superior (segundo orden), se llega al conjunto de ecuaciones

$$-2j\vec{k}_1 \cos\theta \frac{dA_1}{dz} = \omega^2 \mu_0 (-\epsilon'_{r0} r [\vec{E}_0 A_1 + \vec{E}_w \frac{A_1 A_2^*}{I_0} \epsilon'_{r0} A_2] + [j\epsilon''_{r0} + g] A_1) \quad (2.9)$$

$$-2j\vec{k}_2 \cos\theta \frac{dA_2}{dz} = \omega^2 \mu_0 (-\epsilon'_{r0} r [\vec{E}_0 A_2 + \vec{E}_w \frac{A_1^* A_2}{I_0} \epsilon'_{r0} A_1] + [j\epsilon''_{r0} + g] A_2) \quad (2.10)$$

Para una geometría longitudinal (campo paralelo a la dirección [001])

$$\epsilon'_{r0} r \vec{E}_w \epsilon'_{r0} = \epsilon'^2_{r0} r \begin{bmatrix} E_w & 0 & 0 \\ 0 & -E_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Las partes real y compleja del tensor de permitividad relativa, para el caso en el que el eje uniaxial del cristal es z , puede ser escrito, como

$$\epsilon'_{r0} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\perp} = \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} = \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} = \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \epsilon''_{r0} = \begin{bmatrix} \epsilon'' & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon'' & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon'' \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

donde ϵ'' , está relacionado con la constante de absorción, α , por

$$\epsilon'' = \frac{n_0^2 \alpha}{k} \quad (2.13)$$

Por otra parte en materiales isotrópicos y cúbicos, el tensor de actividad óptica, se escribe de la forma simple

$$g = \gamma \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

donde γ es una constante propia del material, y los k_i son las componentes del vector de onda, en la aproximación paraxial, $k_2 = k_3 \approx 0$ y $k_1 \approx k$, con esto el tensor de actividad óptica se convierte en

$$g = \gamma \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g \\ g & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.1.1. Ondas Codireccionales

Para el caso en el cual las ondas incidentes en el material fotorrefractivo, son codireccionales es decir las ondas inciden sobre la misma cara del material fotorrefractivo, como se muestra en la figura(2.1), se tiene la condición $\beta_1\beta_2 > 0$,

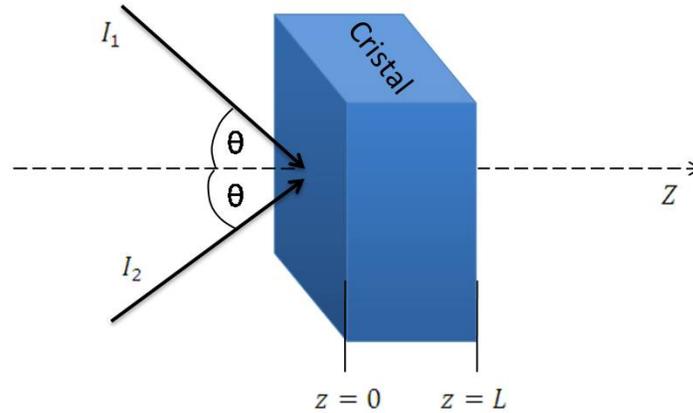


Figura 2.1: Esquema para la mezcla de dos ondas para rayos codireccionales, donde L es la longitud del cristal fotorrefractivo

Remplazando cada una de las definiciones dadas en las ecuaciones (2.11)-(2.15) en (2.9) y (2.10) se llega al conjunto de ecuaciones no lineales acopladas, que permiten obtener las amplitudes de las ondas en función de su longitud de propagación a lo largo del material fotorrefractivo.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}A_1 &= -j \frac{\pi n_1}{\lambda I_0 \cos\theta} e^{-j\phi} |A_2|^2 A_1 - \frac{\alpha}{2} A_1 \\ \frac{d}{dz}A_2 &= -j \frac{\pi n_1}{\lambda I_0 \cos\theta} e^{j\phi} |A_1|^2 A_2 - \frac{\alpha}{2} A_2\end{aligned}\quad (2.16)$$

donde se a tomado

$$\beta_1 = \beta_2 = k \cos\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cos\theta \quad (2.17)$$

Las amplitudes complejas se pueden escribir en terminos de las fases de las mismas como:

$$A_1 = \sqrt{I_1} e^{-j\psi_1}, \quad A_2 = \sqrt{I_2} e^{-j\psi_2} \quad (2.18)$$

donde ψ_1 y ψ_2 son las fases de las amplitudes complejas A_1 y A_2 , respectivamente, luego el sistema de ecuaciones (2.16) se escribe en la forma

$$\frac{d}{dz} \left(\sqrt{I_1} e^{-j\psi_1} \right) = -j \frac{\pi n_1}{\lambda I_0 \cos \theta} e^{-j\phi} \left| \sqrt{I_2} e^{-j\psi_2} \right|^2 \sqrt{I_1} e^{-j\psi_1} - \frac{\alpha}{2} \sqrt{I_1} e^{-j\psi_1} \quad (2.19)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\sqrt{I_2} e^{-j\psi_2} \right) = -j \frac{\pi n_1}{\lambda I_0 \cos \theta} e^{j\phi} \left| \sqrt{I_1} e^{-j\psi_1} \right|^2 \sqrt{I_2} e^{-j\psi_2} - \frac{\alpha}{2} \sqrt{I_2} e^{-j\psi_2} \quad (2.20)$$

Las expresiones anteriores se pueden desarrollar en la siguiente forma:

$$-j \sqrt{I_1} e^{-j\psi_1} \frac{d}{dz} \psi_1 + \frac{1}{2\sqrt{I_1}} \frac{d}{dz} I_1 = -j \frac{\pi n_1}{\lambda I_0 \cos \theta} e^{-j\phi} I_2 \sqrt{I_1} e^{-j\psi_1} - \frac{\alpha}{2} \sqrt{I_1} e^{-j\psi_1} \quad (2.21)$$

$$-j \sqrt{I_2} e^{-j\psi_2} \frac{d}{dz} \psi_2 + \frac{1}{2\sqrt{I_2}} \frac{d}{dz} I_2 = -j \frac{\pi n_1}{\lambda I_0 \cos \theta} e^{-j\phi} I_1 \sqrt{I_2} e^{-j\psi_2} - \frac{\alpha}{2} \sqrt{I_2} e^{-j\psi_2} \quad (2.22)$$

Igualando las partes reales de las ecuaciones (2.21) y (2.22)

$$\frac{d}{dz} I_1 = -\zeta \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} - \alpha I_1 \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dz} I_2 = \zeta \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} - \alpha I_2 \quad (2.24)$$

Similarmente si igualamos las partes imaginarias de estas ecuaciones llegamos a

$$\frac{d}{dz} \psi_1 = \beta \frac{I_2}{I_1 + I_2} \quad (2.25)$$

$$\frac{d}{dz} \psi_2 = \beta \frac{I_1}{I_1 + I_2} \quad (2.26)$$

donde

$$\zeta = \frac{2\pi n_1}{\lambda \cos\theta} \text{sen}\phi \quad (2.27)$$

$$\beta = \frac{\pi n_1}{\lambda \cos\theta} \text{cos}\phi \quad (2.28)$$

Este sistema de ecuaciones ligadas puede ser resuelto notando que si se suman las ecuaciones diferenciales (2.23) y (2.24) se puede obtener la ecuación auxiliar

$$\frac{d}{dz} (I_1 + I_2) = -\alpha (I_1 + I_2) \quad (2.29)$$

Cuya solución se puede expresar en la forma:

$$I_1 + I_2 = (I_1(0) + I_2(0))e^{-\alpha z} \quad (2.30)$$

Resultado que se puede remplazar en la ecuación (2.23), llegando a

$$\frac{dI_1}{dz} + (\alpha + \zeta)I_1 = \zeta \frac{I_1^2}{I_1(0) + I_2(0)} e^{\alpha z} \quad (2.31)$$

que tambien podemos escribir de la siguiente forma:

$$-\frac{dI_1^{-1}}{dz} + (\alpha + \zeta)I_1^{-1} = \zeta \frac{1}{I_1(0) + I_2(0)} e^{\alpha z} \quad (2.32)$$

y cuya solución es de la forma:

$$I_1(z) = I_1(0) \frac{1 + m^{-1}}{1 + m^{-1}e^{\zeta z}} e^{-\alpha z} \quad (2.33)$$

Con la solución anterior y en combinación con la ecuación (2.30), se obtiene la solución para I_2 , aunque también puede remplazarse I_1 en la ecuación (2.24) para obtener:

$$I_2(z) = I_2(0) \frac{1 + m}{1 + me^{-\zeta z}} e^{-\alpha z} \quad (2.34)$$

donde m es la razón de intensidades

$$m = \frac{I_1(0)}{I_2(0)} \quad (2.35)$$

De esta solución se puede notar que en ausencia de absorción ($\alpha = 0$), $I_2(z)$ es una función que incrementa conforme incrementa z y $I_1(z)$ es una función que decrece conforme z aumenta, esto sucede debido a que ζ es positivo. El signo de ζ depende de la ubicación del eje axial c , el resultado del acoplamiento para $\zeta > 0$ indica que la onda 2 gana energía

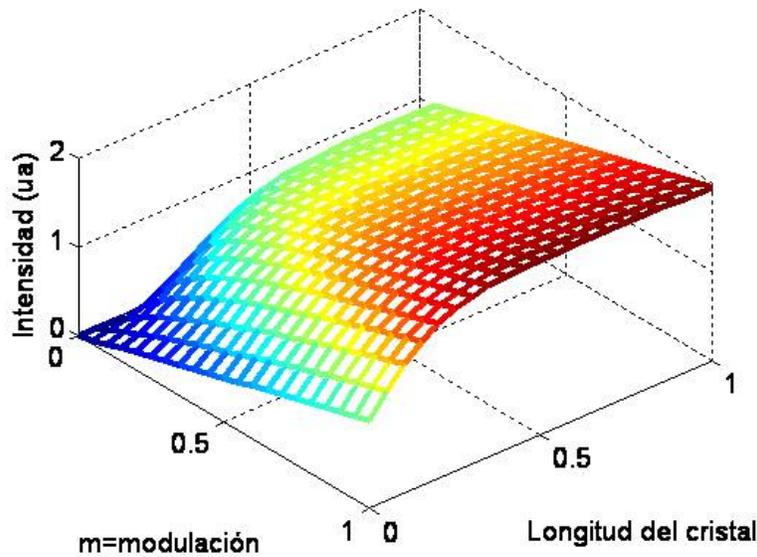


Figura 2.2: Variación de la intensidad I_1 para ondas codireccionales, con $\alpha = 0,02cm^{-1}$ y $\zeta = -10cm^{-1}$

En las figuras (2.2 y 2.3) se muestran las graficas de las intensidades de las ondas como una función de la longitud de profundidad de avance dentro del cristal z y la modulación, para una atenuación de $0,02cm^{-1}$ y valor de $\zeta = -10cm^{-1}$.

Con $I_1(z)$ e $I_2(z)$, las fases de ψ_1 y ψ_2 , se pueden obtener por integración directa; después de realizar esta integración se llega a

$$\psi_1(z) = \psi_1(0) + \frac{\beta}{\zeta} \ln \left(\frac{m + e^{\zeta z}}{1 + m} \right) \quad (2.36)$$

y

$$\psi_2(z) = \psi_2(0) + \frac{\beta}{\zeta} \ln \left(\frac{1 + me^{\zeta z}}{1 + m} \right) \quad (2.37)$$

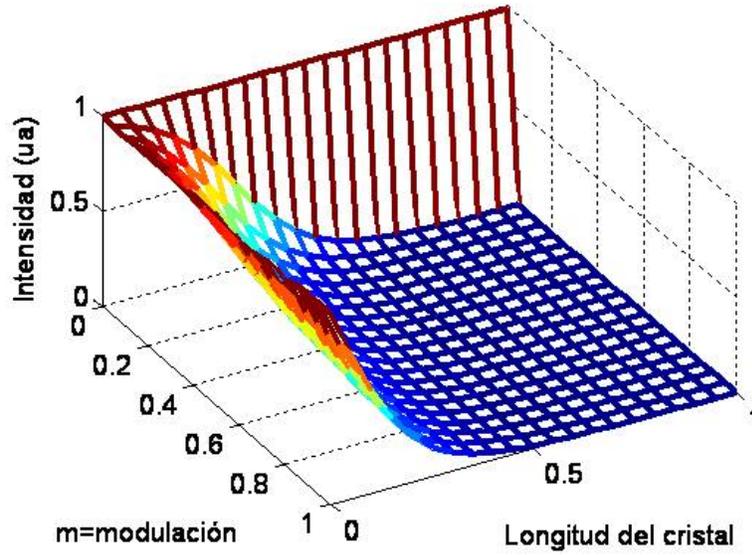


Figura 2.3: Variación de la intensidad 2 para ondas coodireccionales, con $\alpha = 0,02cm^{-1}$ y $\zeta = -10cm^{-1}$

Se puede notar que las fases no dependen de la constante de absorción α . La ganancia G de la onda numero 2 que es la que se amplifica, se puede obtener del cociente entre la intensidad de salida, y la intensidad de entrada, matemáticamente se puede escribir

$$G = \frac{I_2(L)}{I_2(0)} = \frac{1 + m}{1 + me^{-\zeta L}} e^{-\alpha L} \quad (2.38)$$

En la figura.(2.4) se muestra una grafica de la diferencia de fase entre las dos ondas en términos de la longitud de profundidad de avance dentro del cristal z y la modulación de las dos ondas para una diferencia de fases iniciales igual a cero, valor de atenuación $0.02cm^{-1}$ y valor de $\zeta = -10cm^{-1}$

2.1.2. Ondas Contradireccionales

Para el caso en el cual las ondas incidentes en el material fotorrefractivo, son contradireccionales es decir las ondas inciden sobre caras opuestas del material fotorrefractivo, como se muestra en la figura(3.5), se tiene la condición y ademas: $\beta_1\beta_2 < 0$,

$$\beta_1 = -\beta_2 = k\cos\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta \quad (2.39)$$

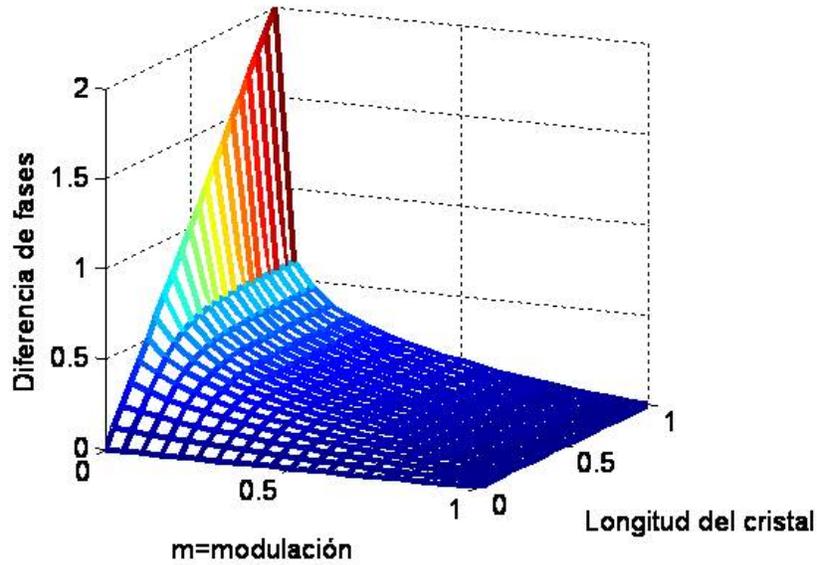


Figura 2.4: Diferencia de fases para ondas codireccionales, con $\beta/\zeta = 0,2$, $\zeta = -10\text{cm}^{-1}$

En este caso, las ecuaciones para las intensidades y las fases se pueden escribir como:

$$\frac{d}{dz}I_1 = -\zeta \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} - \alpha I_1 \quad (2.40)$$

$$\frac{d}{dz}I_2 = -\zeta \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} + \alpha I_2 \quad (2.41)$$

y

$$\frac{d}{dz}\psi_1 = \beta \frac{I_2}{I_1 + I_2} \quad (2.42)$$

$$\frac{d}{dz}\psi_2 = -\beta \frac{I_1}{I_1 + I_2} \quad (2.43)$$

donde ζ y β , están dados por las ecuaciones (2.23) y (2.24).

El sistema de ecuaciones (2.40) y (2.41), es un sistema de ecuaciones no lineales complicado que se puede resolver en forma analítica, si multiplicamos I_2 por (2.40) e I_1 por

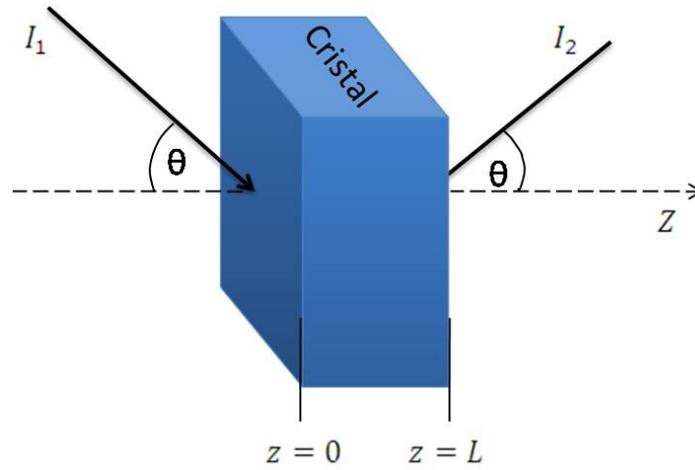


Figura 2.5: Esquema para la mezcla de dos ondas para rayos contradiireccionales, donde L es la longitud del cristal fotorrefractivo

(2.41) y sumamos para llegar a la ecuación

$$\frac{d}{dz} (I_1 I_2) = -\zeta I_1 I_2 \quad (2.44)$$

Está también se puede escribir de la forma:

$$I_2 = \frac{C_1 e^{-\zeta z}}{I_1} \quad (2.45)$$

Remplazando este resultado en la ecuación (2.40) el resultado es

$$\frac{d}{dz} I_1 = -\frac{\zeta I_1 C_1 e^{-\zeta z}}{I_1^2 + C_1 e^{-\zeta z}} - \alpha I_1 \quad (2.46)$$

donde la solución para I_1 , tiene la forma

$$I_1 = I_{11} e^{-\alpha z}, \quad (2.47)$$

que convierte la ecuación (2.46) en

$$\frac{d}{dz} I_{11} = -\frac{\zeta I_{11} C_1 e^{-\zeta z}}{I_{11}^2 e^{-2\alpha z} + C_1 e^{-\zeta z}} \quad (2.48)$$

Tomando la sustitución $u = I_{11}^2 e^{\zeta - 2\alpha z} + C_1$, esta ecuación se convierte en:

$$\frac{udu}{(u - C_1) \left(u - \frac{2\zeta C_1}{\zeta - 2\alpha}\right)} = (\zeta - 2\alpha) dz \quad (2.49)$$

por integración sobre Ec.(2.49) se obtiene:

$$\ln \left[(u - C_1)^{\frac{2\alpha - \zeta}{2\zeta}} \left(u - \frac{2\zeta C_1}{\zeta - 2\alpha} \right) \right] = \frac{(\zeta^2 - 4\alpha^2)}{2\zeta} z + C \quad (2.50)$$

Expresión que se escribe como:

$$I_{11}^{\frac{2\alpha + \zeta}{\zeta}} - C_1 \frac{\zeta + 2\alpha}{\zeta - 2\alpha} I_{11}^{\frac{2\alpha - \zeta}{\zeta}} e^{(2\alpha - \zeta)z} = C_2 \quad (2.51)$$

o en términos de I_1

$$I_1^{\frac{\zeta + 2\alpha}{\zeta}} e^{\frac{\zeta\alpha + 2\alpha^2}{\zeta}z} - C_1 \frac{\zeta + 2\alpha}{\zeta - 2\alpha} I_1^{\frac{2\alpha - \zeta}{\zeta}} e^{\left(\frac{2\alpha^2 + \zeta\alpha - \zeta^2}{\zeta}\right)z} = C_2 \quad (2.52)$$

donde las constantes C_1 y C_2 que resultan de la integración, se obtienen del conjunto de ecuaciones

$$I_1(0)^{\frac{\zeta + 2\alpha}{\zeta}} - C_1 \frac{\zeta + 2\alpha}{\zeta - 2\alpha} I_1(0)^{\frac{2\alpha - \zeta}{\zeta}} = C_2 \quad (2.53)$$

$$\left(\frac{C_1 e^{-\zeta z}}{I_2(L)} \right)^{\frac{\zeta + 2\alpha}{\zeta}} e^{\frac{\zeta\alpha + 2\alpha^2}{\zeta}L} - C_1 \frac{\zeta + 2\alpha}{\zeta - 2\alpha} \left(\frac{C_1 e^{-\zeta z}}{I_2(L)} \right)^{\frac{2\alpha - \zeta}{\zeta}} e^{\left(\frac{2\alpha^2 + \zeta\alpha - \zeta^2}{\zeta}\right)L} = C_2 \quad (2.54)$$

En la figura(2.6) se muestra la grafica de las intensidades de las ondas de la mezcla de dos ondas en forma contradireccional, en azul se observa la intensidad de la onda 2 la cual se amplifica y en negro la intensidad de la onda 1 la cual cede energía, nuevamente la onda que se amplifica se controla con la ubicación del eje axial del cristal, es decir con el parámetro ζ

Es también importante definir expresiones para establecer la ganancia energética de cada onda a la salida del cristal, factor que es llamado transmitancia óptica, $T_1 =$

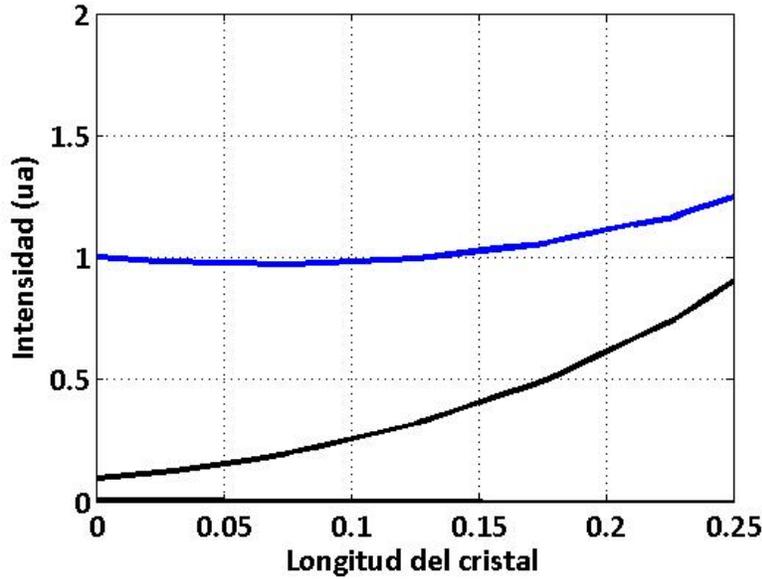


Figura 2.6: Intensidad de la mezcla de ondas contradireccionales, para $I_1(0) = 1$, $I_2(L) = 1$, $\zeta = -10\text{cm}^{-1}$, $\alpha = 1,6\text{cm}^{-1}$ y $L = 0,25\text{cm}$

$(I_1(L)) / (I_1(0))$ y $T_2 = (I_2(0)) / (I_2(L))$, así, podemos llevar las (3.53) y (3.54) a la forma:

$$e^{\frac{\zeta\alpha+2\alpha^2}{\zeta}L} T_1^{\frac{\zeta+2\alpha}{\zeta}} - \frac{1}{m'} e^{\frac{\zeta\alpha+2\alpha^2}{\zeta}L} \frac{\zeta+2\alpha}{\zeta-2\alpha} T_1^{\frac{2\alpha}{\zeta}} + \frac{1}{m'} e^{\zeta L} \frac{\zeta+2\alpha}{\zeta-2\alpha} T_1 - 1 = 0 \quad (2.55)$$

$$e^{\frac{2\alpha^2-\zeta\alpha-\zeta^2}{\zeta}L} T_2^{\frac{\zeta+2\alpha}{\zeta}} - \frac{1}{m'} e^{\frac{2\alpha^2-\zeta\alpha}{\zeta}L} \frac{\zeta+2\alpha}{\zeta-2\alpha} T_2^{\frac{2\alpha}{\zeta}} + \frac{1}{m'} \frac{\zeta+2\alpha}{\zeta-2\alpha} T_2 - 1 = 0 \quad (2.56)$$

donde $m' = I_1(0) / (I_2(L))$ es la relación entre las intensidades de las ondas incidentes, para los valores utilizados en la figura.(2.6), los valores de las transmitancias respectivamente son, $T_1 = 1,2978$ y $T_2 = 0,1065$

Para el caso particular en el cual $\alpha = 0$, la solución, es decir el medio no presenta atenuación, el sistema de ecuaciones (2.45) y (2.52) se convierte en

$$I_1(z) = -C + \sqrt{C^2 + B e^{-\zeta z}} \quad (2.57)$$

$$I_2(z) = C + \sqrt{C^2 + B e^{-\zeta z}} \quad (2.58)$$

donde B y C están determinados por

$$B = I_1(0)I_2(L) \frac{I_1(0) + I_2(L)}{I_2(L) + I_1(0)e^{-\zeta L}} \quad (2.59)$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{I_2^2(L) - I_1^2(0)e^{-\zeta L}}{I_2(L) + I_1(0)e^{-\zeta L}} \quad (2.60)$$

Las expresiones (2.59) y (2.60) pueden ser expresar en términos de $I_1(0)$ e $I_2(0)$

$$B = I_1(0)I_2(0) \quad (2.61)$$

$$C = \frac{I_2(0) - I_1(0)}{2} \quad (2.62)$$

Del conjunto de ecuaciones (2.55)-(2.56), se pueden obtener las transmitancias de las dos ondas, las cuales esta dadas por

$$T_1 = \frac{I_1(L)}{I_1(0)} = \frac{1 + m'^{-1}}{1 + m'^{-1}e^{\zeta L}} \quad (2.63)$$

$$T_2 = \frac{I_2(0)}{I_2(L)} = \frac{1 + m'}{1 + m'e^{-\zeta L}} \quad (2.64)$$

donde m' es la razón $m' = \frac{I_1(0)}{I_2(L)}$, se puede notar que $T_1 < 1$ y $T_2 > 0$ para un valor de ζ positivo. El signo de ζ depende de la dirección del eje axial, además se puede notar que T_1 y T_2 están relacionados de la forma $T_2 = T_1 e^{\zeta L}$

2.2 Influencia de la polarización en la Mezcla de dos ondas

Para el caso en el cual se tiene en cuenta la polarización de las dos ondas incidentes el campo eléctrico debe ser escrito en terminos de sus componentes perpendiculares y paralelas al plano de incidencia sobre el material fotorrefractivo, es decir de la forma

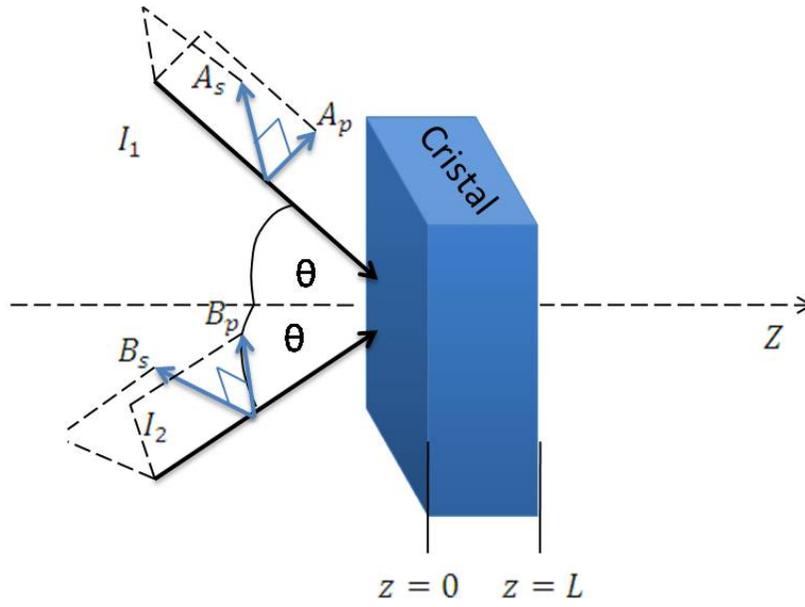


Figura 2.7: Diagrama para la mezcla de dos ondas en un cristal fotorrefractivo considerando la polarización de las ondas

$$\tilde{E} = (\vec{s}A_s + \vec{p}_1A_p)e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + (\vec{s}B_s + \vec{p}_2B_p)e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \quad (2.65)$$

donde \vec{k}_1 y \vec{k}_2 son los vectores de onda de los dos rayos, \vec{s} , es un vector unitario perpendicular al plano de incidencia, \vec{p}_1 , \vec{p}_2 son vectores unitarios paralelos al plano de incidencia y perpendiculares a los vectores de onda respectivamente. Teniendo cada onda dos componentes de polarización, involucrando en este caso cuatro ondas de amplitudes A_s , A_p , B_s y B_p . Se toman iguales las frecuencias de las ondas.

En el cristal fotorrefractivo, el patrón de interferencia que generan las dos ondas polarizadas esta dado como:

$$\begin{aligned} \tilde{E} \cdot \tilde{E}^* = & A_sA_s^* + A_pA_p^* + B_sB_s^* + B_pB_p^* + \\ & \left[(A_sB_s^* + A_pB_p^* \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} + c.c \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde $\vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$, es el vector de red, y c.c representa el complejo conjugado, esta intensidad puede ser escrita en la forma.

$$\tilde{E} \cdot \tilde{E}^* = I_0 + \left[(A_sB_s^* + A_pB_p^* \cos\theta) e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} + c.c \right] \quad (2.67)$$

donde θ , es el ángulo entre los dos rayos, incidentes sobre el cristal, e I_0 está dado por

$$I_0 = A_s A_s^* + A_p A_p^* + B_s B_s^* + B_p B_p^* \quad (2.68)$$

De forma similar al procedimiento realizado para la mezcla de dos ondas, se llega al conjunto de ecuaciones para las amplitudes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} A_s &= \frac{i}{2\beta_1} e^{i\phi} [\Gamma_{ss} B_s + \Gamma_{sp_2} B_p] \frac{(A_s B_s^* + A_p B_p^* \cos\theta)}{I_0} \\ \frac{d}{dz} B_s &= \frac{i}{2\beta_2} e^{-i\phi} [\Gamma_{ss} B_s + \Gamma_{sp_1} B_p] \frac{(A_s^* B_s + A_p^* B_p \cos\theta)}{I_0} \\ \frac{d}{dz} A_p &= \frac{i}{2\beta_1} e^{i\phi} [\Gamma_{p_1s} B_s + \Gamma_{p_1p_2} B_p] \frac{(A_s B_s^* + A_p B_p^* \cos\theta)}{I_0} \\ \frac{d}{dz} B_p &= \frac{i}{2\beta_2} e^{-i\phi} [\Gamma_{p_2s} B_s + \Gamma_{p_2p_1} B_p] \frac{(A_s^* B_s + A_p^* B_p \cos\theta)}{I_0} \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde

$$\Gamma_{ij} = \langle i | \Gamma | j \rangle \quad (2.70)$$

$$\Gamma = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \quad (2.71)$$

y

$$\epsilon_1 = n_0^4 r \begin{pmatrix} 0 & E_z & E_y \\ E_z & 0 & E_x \\ E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

donde E_x , E_y y E_z son las amplitudes de las componentes del campo de carga espacial, ϕ es la diferencia de fase entre la red de índices y el patrón de interferencia, β_1 y β_2 son las componentes de los vectores de onda en la dirección z .

Para ilustrar como se resuelve el sistema de ecuaciones (2.69) en un caso particular, en el cual dos ondas inciden sobre el cristal de tal forma que el vector de red este a lo largo

de la dirección [110] en el cristal, en esta configuración el vector \vec{s} es paralelo a [001] y los vectores \vec{p}_1 y \vec{p}_2 son perpendiculares a [001], la amplitud del índice de red inducido se puede escribir como:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} n_0^4 r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} E^{ce} \quad (2.73)$$

donde E^{ce} es la amplitud del campo de carga espacial, además del conjunto de ecuaciones (2.74), (2.75) y (2.77), se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{sp_1} = \Gamma_{p_1s} = \Gamma_{sp_2} \Gamma_{p_2s} &= \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 n_0^4 r E^{ce} \cos(\theta/2) \\ \Gamma_{ss} = \Gamma_{p_1p_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

donde se asume que las dos ondas inciden en forma simétrica sobre el cristal, esto es

$$\beta_1 = \beta_2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) n_0 \cos(\theta/2) \quad (2.75)$$

Sustituyendo en el conjunto de ecuaciones (2.73), se obtiene un conjunto de ecuaciones más sencillo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} A_s &= -\gamma B_p \frac{(A_s B_s^* + A_p B_p^* \cos\theta)}{I_0} \\ \frac{d}{dz} B_s &= \gamma A_p \frac{(A_s^* B_s + A_p^* B_p \cos\theta)}{I_0} \\ \frac{d}{dz} A_p &= -\gamma B_s \frac{(A_s B_s^* + A_p B_p^* \cos\theta)}{I_0} \\ \frac{d}{dz} B_p &= \gamma A_s \frac{(A_s^* B_s + A_p^* B_p \cos\theta)}{I_0} \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 n_0^3 r E^{ce} \quad (2.77)$$

La primera y la cuarta ecuación del conjunto de ecuaciones (2.80), pueden ser utilizadas para llegar respectivamente a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (A_s A_s^*) &= -\gamma \frac{(A_s A_s^* B_s^* B_p + A_p A_s^* B_p^* B_p \cos\theta)}{I_0} \\ &\quad -\gamma \frac{(A_s A_s^* B_s B_p^* + A_s A_p^* B_p^* B_p \cos\theta)}{I_0} \end{aligned} \quad (2.78)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (B_p B_p^*) &= \gamma \frac{(A_s A_s^* B_s^* B_p + A_p A_s^* B_p^* B_p \cos\theta)}{I_0} \\ &\quad +\gamma \frac{(A_s A_s^* B_s B_p^* + A_s A_p^* B_p^* B_p \cos\theta)}{I_0} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Si se combinan estas dos ecuaciones se obtiene:

$$\frac{d}{dz} (A_s A_s^*) + \frac{d}{dz} (B_p B_p^*) = 0 \quad (2.80)$$

lo cual nos conduce a la condición

$$A_s A_s^* + B_p B_p^* = c_1 \quad (2.81)$$

En la misma forma se pueden obtener tres condiciones adicionales, lo cual nos genera el conjunto de condiciones que facilitan la solución del sistema

$$\begin{aligned} A_s A_s^* + B_p B_p^* &= c_1 \\ A_p A_p^* + B_s B_s^* &= c_2 \\ A_s A_p^* + B_p B_s^* &= c_3 \\ A_s B_s - A_p B_p &= c_4 \end{aligned} \quad (2.82)$$

El sistema de ecuaciones (3.80), en combinación con el conjunto de condiciones (3.86) y las sustituciones $f = A_p/A_s$ y $g = B_p/B_s$, conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}g &= -\frac{\gamma}{I_0} (g^2 c_2 \cos \theta + g\vartheta^* - c_1) \\ \frac{d}{dz}f &= \frac{\gamma}{I_0} (f^2 c_1 \cos \theta + g\vartheta - c_2)\end{aligned}\quad (2.83)$$

donde $\vartheta = c_3 - c_3^* \cos \theta$, las soluciones de las ecuaciones diferenciales son respectivamente

$$\begin{aligned}g &= \frac{1}{2c_2 \cos \theta} \frac{(q^* + \vartheta^*) + (q^* - \vartheta^*) C e^{-\frac{\gamma q^*}{I_0} z}}{1 - C e^{-\frac{\gamma q^*}{I_0} z}} \\ f &= \frac{1}{2c_1 \cos 2\theta} \frac{(q + \vartheta) + (q - \vartheta) C' e^{\frac{\gamma q}{I_0} z}}{1 - C' e^{\frac{\gamma q}{I_0} z}}\end{aligned}\quad (2.84)$$

donde $q^2 = 4c_1 c_2 \cos \theta + \vartheta^2$, para obtener las amplitudes, se utilizan las condiciones, así, de la segunda condición se puede escribir:

$$\frac{A_p A_p^*}{A_s A_s^*} + \frac{B_s B_s^*}{A_s A_s^*} = \frac{c_2}{A_s A_s^*} = \frac{A_p A_p^*}{A_s A_s^*} + \frac{B_p B_p^*}{\frac{B_s B_s^*}{A_s A_s^*}} \quad (2.85)$$

Utilizando la primera condición para remplazar $B_p B_p^*$

$$\frac{c_2}{|A_s|^2} = |f|^2 + \frac{c_1 - |A_s|^2}{|g|^2 |A_s|^2}, \quad (2.86)$$

llegando a la solución para $|A_s|^2$ de la forma:

$$|A_s|^2 = \frac{c_1 - c_2 |g|^2}{1 - |fg|^2} \quad (2.87)$$

Similarmente se obtienen las soluciones de todas las amplitudes, las cuales están dadas respectivamente en la forma:

$$\begin{aligned}
|A_s|^2 &= \frac{c_1 - c_2 |g|^2}{1 - |fg|^2} \\
|A_p|^2 &= \frac{c_1 |f|^2 - c_2 |fg|^2}{1 - |fg|^2} \\
|B_s|^2 &= \frac{c_2 - c_1 |f|^2}{1 - |fg|^2} \\
|B_p|^2 &= \frac{c_2 |g|^2 - c_1 |fg|^2}{1 - |fg|^2}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

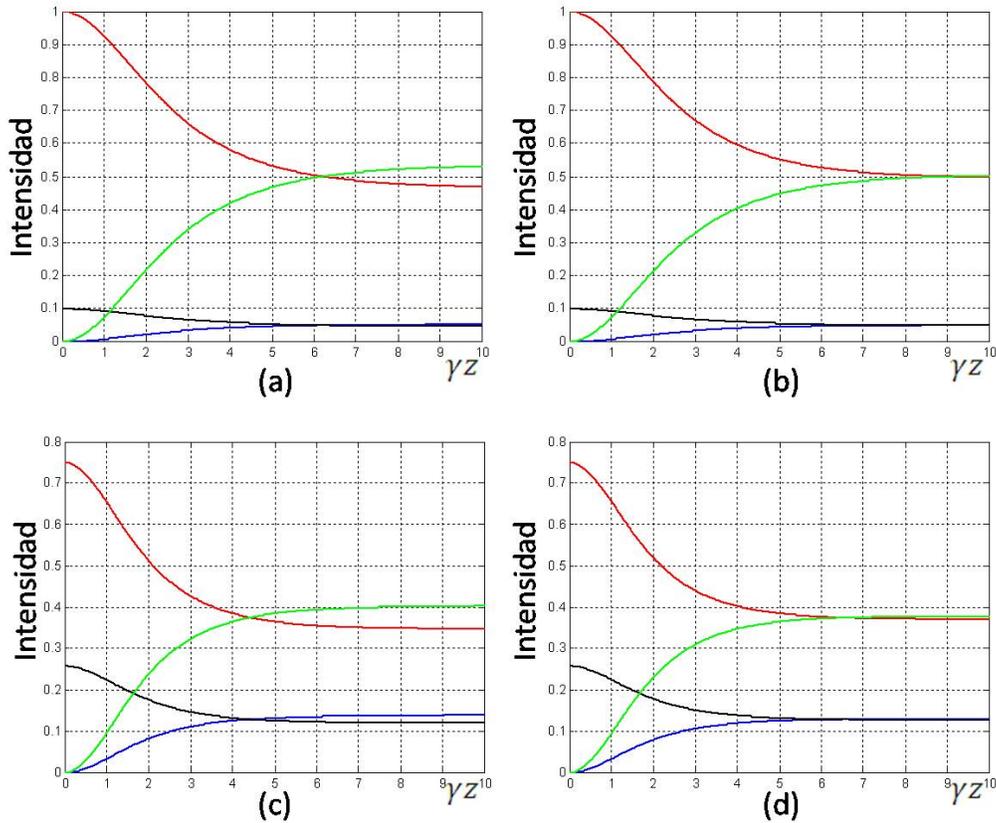


Figura 2.8: mezcla de dos ondas codireccionales, considerando la influencia de la polarización (a) $\theta = 30^\circ$, $|A_s|^2 = 1$, $|B_s|^2 = 0,1$, $|A_p|^2 = 0$ y $|B_p|^2 = 0$, (b) $\theta = 12^\circ$, $|A_s|^2 = 1$, $|B_s|^2 = 0,1$, $|A_p|^2 = 0$ y $|B_p|^2 = 0$, (c) $\theta = 30^\circ$, $|A_s|^2 = 0,75$, $|B_s|^2 = 0,0075$, $|A_p|^2 = 0,25$ y $|B_p|^2 = 0$ y (d) $\theta = 12^\circ$, $|A_s|^2 = 0,75$, $|B_s|^2 = 0,0075$, $|A_p|^2 = 0,25$ y $|B_p|^2 = 0$

En la figura(2.8), se muestra una gráfica de la mezcla de dos ondas en forma codireccional considerando la polarización de las mismas, para diferentes amplitudes iniciales

y diferentes valores de θ , si se compara la rapidez de la transferencia de energía en todos los casos se puede notar que conforme aumenta el valor de θ , aumenta la rapidez con la cual se trasfiere energía entre las ondas, otro parametro que modifica está rapidez es el cociente entre las intensidades iniciales de la componente de polarización s, esto es $|B_s|^2 / |A_s|^2$ el cual para las figura 2.8.a y 2.8.b tiene un valor de 0.1, mientras que para las figuras 2.8.c y 2.8.d tiene un valor de 0.01, al disminuir este valor aumenta la rapidez, de igual forma sin importar cual sea el valor del ángulo θ , existe una transferencia de la componente A_s , a la componente B_p , y de la componente B_s , hacia la componente A_p .

Para el caso contradireccional de dos ondas pero con la consideración de la polarización, el sistema de ecuaciones (2.80) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} A_s &= \gamma B_p \frac{(A_s B_s^* + A_p B_p^* \cos\theta)}{I_0} \\ \frac{d}{dz} B_s &= \gamma A_p \frac{(A_s^* B_s + A_p^* B_p \cos\theta)}{I_0} \\ \frac{d}{dz} A_p &= \gamma B_s \frac{(A_s B_s^* + A_p B_p^* \cos\theta)}{I_0} \\ \frac{d}{dz} B_p &= \gamma A_s \frac{(A_s^* B_s + A_p^* B_p \cos\theta)}{I_0} \end{aligned} \quad (2.89)$$

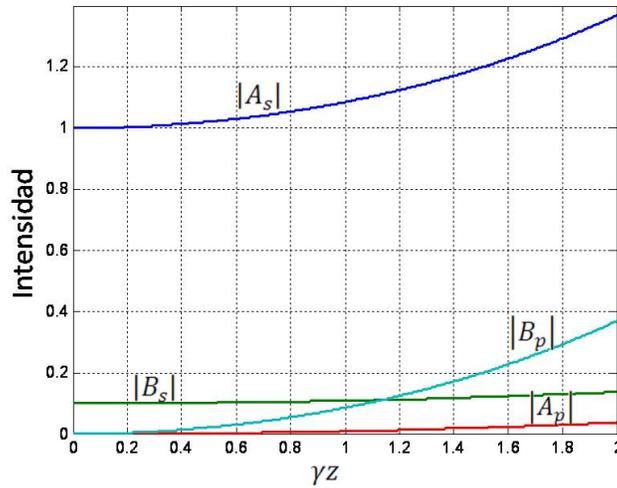


Figura 2.9: mezcla de dos ondas contra-direccionales para $\theta = 30^\circ$, $A_p(0) = B_p(0) = 0$, $c_2/c_1 = 0,1$

En este caso la intensidad total de las ondas no es constante, y el conjunto de condiciones (2.86) se modifican en la forma:

$$\begin{aligned}
A_s A_s^* - B_p B_p^* &= c_1 \\
A_p A_p^* - B_s B_s^* &= c_2 \\
A_s A_p^* - B_p B_s^* &= c_3 \\
A_s B_s - A_p B_p &= c_4
\end{aligned} \tag{2.90}$$

La intensidad total de las ondas esta dada por $I_0 = A_s A_s^* + B_p B_p^* + A_p A_p^* + B_s B_s^*$, el término que es una constante en este caso es, $A_s A_s^* - B_p B_p^* + A_p A_p^* - B_s B_s^*$

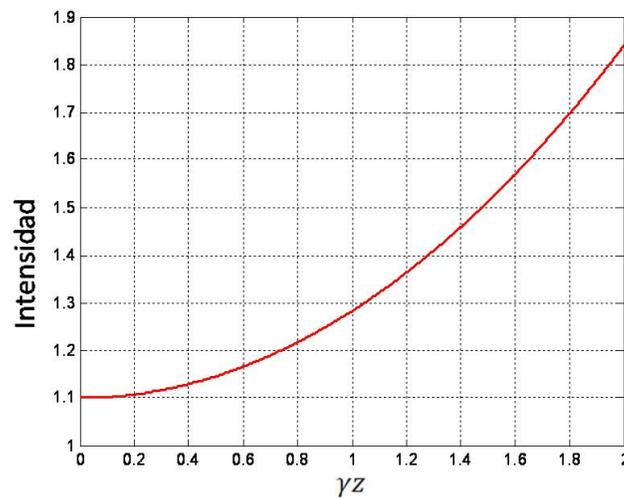


Figura 2.10: intensidad total para la mezcla contradireccional con $\theta = 30^\circ$, $A_p(0) = B_p(0) = 0$, $c_2/c_1 = 0,1$

En la figura(2.9) se muestran las intensidades de las cuatro ondas para un valor de $\theta = 30^\circ$, mientras que en la figura(2.10), se ilustra la variación de la amplitud total de las ondas, en este caso existe una gran dificultad para determinar como es la transferencia de energía entre las ondas, algo interesante en este caso es que la amplitud total no es constante.

CAPÍTULO 3

Mezcla de N ondas en un medio Fotorrefractivo

3.1 Mezcla de cuatro ondas con frecuencias diferentes

Cuando inciden más de dos ondas en un medio fotorrefractivo, la obtención de las intensidades de las ondas a lo largo del material es complicada, por tal motivo en este caso se utilizaran herramientas computacionales para resolver este problema, iniciaremos con la solución computacional de la mezcla de cuatro ondas para luego generalizar el problema a cualquier número de ondas. En el caso de cuatro ondas el campo óptico se asume de la forma

$$\tilde{E} = \sum_{-1}^2 A_i e^{j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - w_i t)} \quad (3.1)$$

en donde las A_i son las amplitudes complejas de estos campos, las cuales se asumen presentan una variación lenta y $w_i = w + i\delta w$, $i = -1, 0, 1, 2$, siendo δw una pequeña variación en la frecuencia de los haces, la cual hace que el patrón de interferencia sea dinámico, así el patrón de intensidades tiene la forma

$$I = \tilde{E} \cdot \tilde{E}^* = \sum_{-1}^2 A_i e^{j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - w_i t)} \cdot \sum_{-1}^2 A_i^* e^{-j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - w_i t)}, \quad (3.2)$$

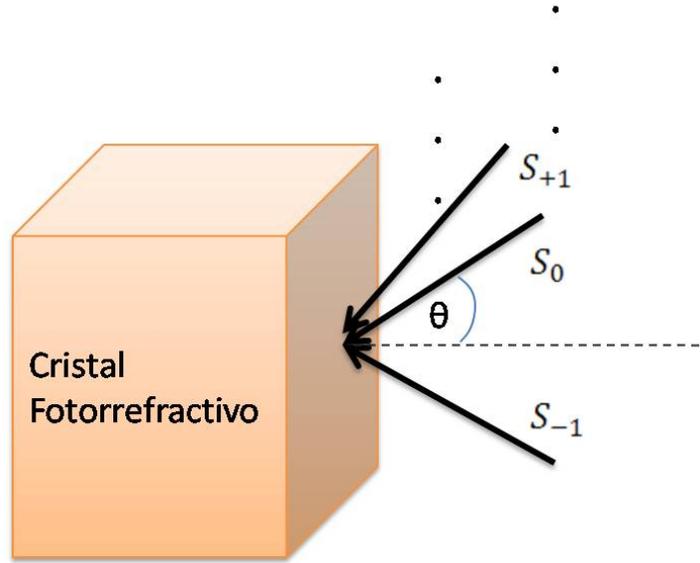


Figura 3.1: Esquema de la incidencia de N ondas sobre el cristal fotorrefractivo

que tambien se puede escribir en la forma:

$$I = I_0 + I_1 e^{j(Kz - \delta\omega t)} + I_2 e^{j(2Kz - 2\delta\omega t)} + I_3 e^{j(3Kz - 3\delta\omega t)} \quad (3.3)$$

Donde $I_0 = A_{-1}A_{-1}^* + A_0A_0^* + A_1A_1^* + A_2A_2^*$, $I_1 = A_0A_{-1}^* + A_1A_0^* e^{-j\psi_1 x} + A_2A_1^* e^{-j(\psi_2 - \psi_1)x}$, $I_2 = A_2A_0^* e^{-j\psi_2 x} + A_1A_{-1}^* e^{-j\psi_1 x}$, $I_3 = A_2A_{-1}^* e^{-j\psi_2 x}$. Donde ψ_1 y ψ_2 son los términos de desajuste en el momento (términos off-Bragg)[28], remplazando en las ecuaciones del material de Kukhtarev, de la expresión (2.3) se tiene

$$\begin{aligned} J_0 &= e\mu N_0 E_0 \\ 0 &= e\mu N_0 E_1 + e\mu n_1 E_0 - j\mu k K T N_1 - j\delta\omega E_1 \epsilon \\ 0 &= e\mu N_0 E_2 + e\mu n_2 E_0 - 2j\mu k K T N_2 - 2j\delta\omega E_2 \epsilon \\ 0 &= e\mu N_0 E_3 + e\mu n_3 E_0 - 3j\mu k K T N_3 - 3j\delta\omega E_3 \epsilon \end{aligned} \quad (3.4)$$

De forma similar de la expresión (2.2), se obtiene las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
0 &= sI_0N_D - sI_0N_{D0}^+ - \gamma_R N_0 N_{D0}^+ \\
-j\delta\omega N_{D1}^+ &= -sI_1N_D + sI_1N_{D0}^+ - sI_0N_{D1}^+ - \gamma_R N_0 N_{D1}^+ \\
&\quad - \gamma_R n_1 N_{D0}^+ \epsilon \\
-2j\delta\omega N_{D2}^+ &= -sI_2N_D + sI_2N_{D0}^+ - sI_0N_{D2}^+ - \gamma_R N_0 N_{D2}^+ \\
&\quad - \gamma_R n_2 N_{D0}^+ \epsilon \\
-3j\delta\omega N_{D3}^+ &= -sI_3N_D + sI_3N_{D0}^+ - sI_0N_{D3}^+ - \gamma_R N_0 N_{D3}^+ \\
&\quad - \gamma_R n_3 N_{D0}^+ \epsilon
\end{aligned} \tag{3.5}$$

y de la expresión (2.4) las ecuaciones

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{e}{\epsilon} (N_{D0}^+ - N_A^-) \\
-jKE_1 &= \frac{e}{\epsilon} N_{D1}^+ \\
-2jKE_2 &= \frac{e}{\epsilon} N_{D2}^+ \\
-3jKE_3 &= \frac{e}{\epsilon} N_{D3}^+
\end{aligned} \tag{3.6}$$

De la ecuación (3.6) se llega a

$$N_{D0}^+ = N_A^- \tag{3.7}$$

De los conjuntos de ecuaciones (3.6) y (3.4), se tiene la expresión generalizada

$$N_{Dp}^+ = -jp \frac{\epsilon}{e} KE_p \tag{3.8}$$

$$n_p = \frac{e\mu n_0 - jp\delta\omega\epsilon}{-e\mu E_0 + jp\mu kKT} E_p \tag{3.9}$$

donde $p = 1, 2, 3$

Remplazando las ecuaciones (3.7-3.9) en (3.5) y asumiendo que $N_A^- \ll N_D$, se obtiene la expresión para el campo de carga espacial

$$E_p = \frac{-sI_p (N_D - N_A^-)}{\left(-\frac{p^2 \delta \omega \epsilon K}{e} - \frac{jsI_0 p \epsilon K}{e} - \gamma_R n_0 \frac{jp \epsilon K}{e} + \gamma_R N_A^- \frac{e \mu n_0 - jp \delta \omega \epsilon}{-e \mu E_0 + jp \mu k K T} \right)} \quad (3.10)$$

Utilizando las expresiones (2.27) para los campos, se llega a la expresión

$$E_p = \frac{I_p}{I_0} \frac{(-E_0 + jE_{Dp}) E_{qp}}{E_{qp} + E_{Dp} + jE_0 - jpKv\tau_d \frac{E_{qp}}{E_{Mp}} (E_{Mp} + E_{Dp} + jE_0)} \quad (3.11)$$

donde

$$E_{Dp} = \frac{pKtk}{e}, E_{qp} = \frac{eN_A^-}{\epsilon pK}, E_{Mp} = \frac{\gamma_R N_A^-}{\mu pK}, v = \frac{\delta \omega}{K} \text{ y } \tau_d = \frac{\epsilon}{N_0 e \mu} \quad (3.12)$$

N_0 es la densidad promedio de electrones y $p = 1, 2, 3$. El campo de carga espacial obtenido se utiliza para calcular la variación de la permitividad, la cual en conjunto con el campo óptico aplicado se introducen en la ecuación de ondas

$$\nabla^2 \tilde{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left((\epsilon_r + \Delta \epsilon_r) \tilde{E} \right) = 0 \quad (3.13)$$

La variación de la permitividad, se obtiene en la forma

$$\Delta \epsilon_r = -r \epsilon_r^2 \left(E_0 + \left(\begin{array}{c} E_1 e^{j(Kz - \delta \omega t)} + E_2 e^{2j(Kz - \delta \omega t)} \\ + E_3 e^{3j(Kz - \delta \omega t)} + c.c \end{array} \right) \right) \quad (3.14)$$

esta variación de la permitividad, multiplicada por el campo eléctrico de la luz incidente produce

$$\Delta \epsilon_r \tilde{E} = M_{-1} e^{j(\vec{k}_{-1} \cdot \vec{r} - (\omega - \delta \omega t))} + M_0 e^{j(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - (\omega t))} + M_{+1} e^{j(\vec{k}_{+1} \cdot \vec{r} - (\omega + \delta \omega t))} + M_{+2} e^{j(\vec{k}_{+2} \cdot \vec{r} - (\omega + 2\delta \omega t))} \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned}
M_{-1} &= E_0 A_{-1} + E_1^* A_0 + E_2^* A_{+1} e^{-j\psi_1 x} + E_3^* A_{+2} e^{-j\psi_2 x} \\
M_0 &= E_0 A_0 + E_1 A_{-1} + E_1^* A_{+1} e^{-j\psi_1 x} + E_2^* A_{+2} e^{-j\psi_2 x} \\
M_{+1} &= E_0 A_{+1} + E_1 A_0 e^{j\psi_1 x} + E_1^* A_{+2} e^{-j(\psi_2 - \psi_1)x} + E_2 A_{-1} e^{j\psi_1 x} \\
M_{+2} &= E_0 A_{+2} + E_1 A_{+1} e^{-j(\psi_2 - \psi_1)x} + E_2 A_0 e^{-j\psi_2 x} + E_3 A_{-1} e^{-j\psi_2 x}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Al remplazar este resultado en la ecuación de ondas se llega al conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
2j\vec{k}_{-1} \cdot \nabla A_{-1} - k_{-1}^2 A_{-1} &= r\epsilon_r^2 \mu_0 \epsilon_0 M_{-1} \omega^2 - r\epsilon_r^2 \mu_0 \epsilon_0 E_0 A_{-1} \\
&\quad - \epsilon_r \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 A_{-1} \\
2j\vec{k}_0 \cdot \nabla A_0 - k_0^2 A_0 &= r\epsilon_r^2 \mu_0 \epsilon_0 M_0 \omega^2 - r\epsilon_r^2 \mu_0 \epsilon_0 E_0 A_0 \\
&\quad - \epsilon_r \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 A_0 \\
2j\vec{k}_{+1} \cdot \nabla A_{+1} - k_{+1}^2 A_{+1} &= r\epsilon_r^2 \mu_0 \epsilon_0 M_{+1} \omega^2 - r\epsilon_r^2 \mu_0 \epsilon_0 E_0 A_{+1} \\
&\quad - \epsilon_r \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 A_{+1} \\
2j\vec{k}_{+2} \cdot \nabla A_{+2} - k_{+2}^2 A_{+2} &= r\epsilon_r^2 \mu_0 \epsilon_0 M_{+2} \omega^2 - r\epsilon_r^2 \mu_0 \epsilon_0 E_0 A_{+2} \\
&\quad - \epsilon_r \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 A_{+2}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

,

que se puede simplificar en la forma matricial:

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} S_{-1} \\ S_0 \\ S_{+1} \\ S_{+2} \end{pmatrix} = -j \begin{pmatrix} 0 & a_{-10} & a_{-1+1} & a_{-1+2} \\ a_{0-1} & 0 & a_{0+1} & a_{0+2} \\ a_{+1-1} & a_{+10} & 0 & a_{+1+2} \\ a_{+2-1} & a_{+20} & a_{+2+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{-1} \\ S_0 \\ S_{+1} \\ S_{+2} \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

en donde $\xi = x/L$ es la longitud normalizada de avance de las ondas dentro del cristal, siendo L la longitud total del cristal.

$$\begin{aligned}
a_{-10}a_{0-1}^* &= \Gamma_1^*L [S_0^*S_{-1} + S_{+1}^*e^{j\psi_1L\xi} + S_{+2}^*S_{+1}e^{j(\psi_2-\psi_1)L\xi}] \\
a_{-1+1}a_{+1-1}^* &= \Gamma_2^*L [S_0S_{+2}^*e^{j(\psi_2-\psi_1)L\xi} + S_{-1}S_{+1}^*] \\
a_{-1+2}a_{+2-1}^* &= \Gamma_3^*LS_{-1}S_{+2}^* \\
a_{0+2}a_{+20}^* &= \Gamma_2^*L [S_{-1}^*S_{-1}e^{-j(\psi_2-\psi_1)L\xi} + S_0S_{+2}^*] \\
a_{+1+2}a_{+2+1}^* &= \Gamma_1^*L [S_0^*S_{-1}e^{-j(\psi_2-\psi_1)L\xi} + S_{+1}S_{+2}^*] \\
&\quad + \Gamma_1^*L [S_{+1}^*S_0e^{-j(\psi_2-2\psi_1)L\xi}] \\
a_{0+1}a_{+10}^* &= \Gamma_1^*L [S_0^*S_{-1}e^{-j(\psi_1)L\xi}] \\
&\quad + \Gamma_1^*L [S_0S_{+1}^* + S_{+2}^*S_{+1}e^{j(\psi_2-2\psi_1)L\xi}]
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$S_i = A_i / \sum_{-1}^{+2} |A_i|^2 \quad i = -1, 0, +1, +2 \tag{3.20}$$

$$\Gamma_p = c\Omega_p \quad p = 1, 2, 3 \quad c = \frac{\omega}{2}r\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r^3} \tag{3.21}$$

$$\Omega_p = \frac{(-E_0 + jE_{Dp})E_{qp}}{E_{qp} + E_{Dp} + jE_0 - jlKv\tau_d \frac{E_{qp}}{E_{Mp}} (E_{Mp} + E_{Dp} + jE_0)} \tag{3.22}$$

En la figura 3.2 se muestra la mezcla de cuatro ondas variando parametros caracteristicos de las ondas y del cristal.

Cuando se incrementa el valor del ángulo theta, como se muestra en las figuras 3.2.a y 3.2.b, donde se incremento el valor del ángulo de 0.2 a 0.3 grados aumentan las oscilaciones presentadas en las ondas incidentes y en los armónicos de las mismas, si incrementamos la longitud del cristal se pueden observar las oscilaciones de estas ondas figura 3.2.c , por otra parte al incrementar el valor del campo, manteniendo constante el valor de la longitud del cristal, aumentan las amplitudes de salida de los armónicos y aumenta la frecuencia de las oscilaciones, este incremento del campo fue de 15 KV/cm en las figuras 3.2.a-3.2.c a 20 KV/cm en la figura 3.2.d.

Los valores de las constantes off bragg son: para 1.a $\psi_1 = 6.7616$, $\psi_2 = 20.2817$, para 1.b $\psi_1 = 15.214$, $\psi_2 = 45.6471$ y para 1.c-1.d $\psi_1 = 19.0176$, $\psi_2 = 57.0589$ respectivamente y

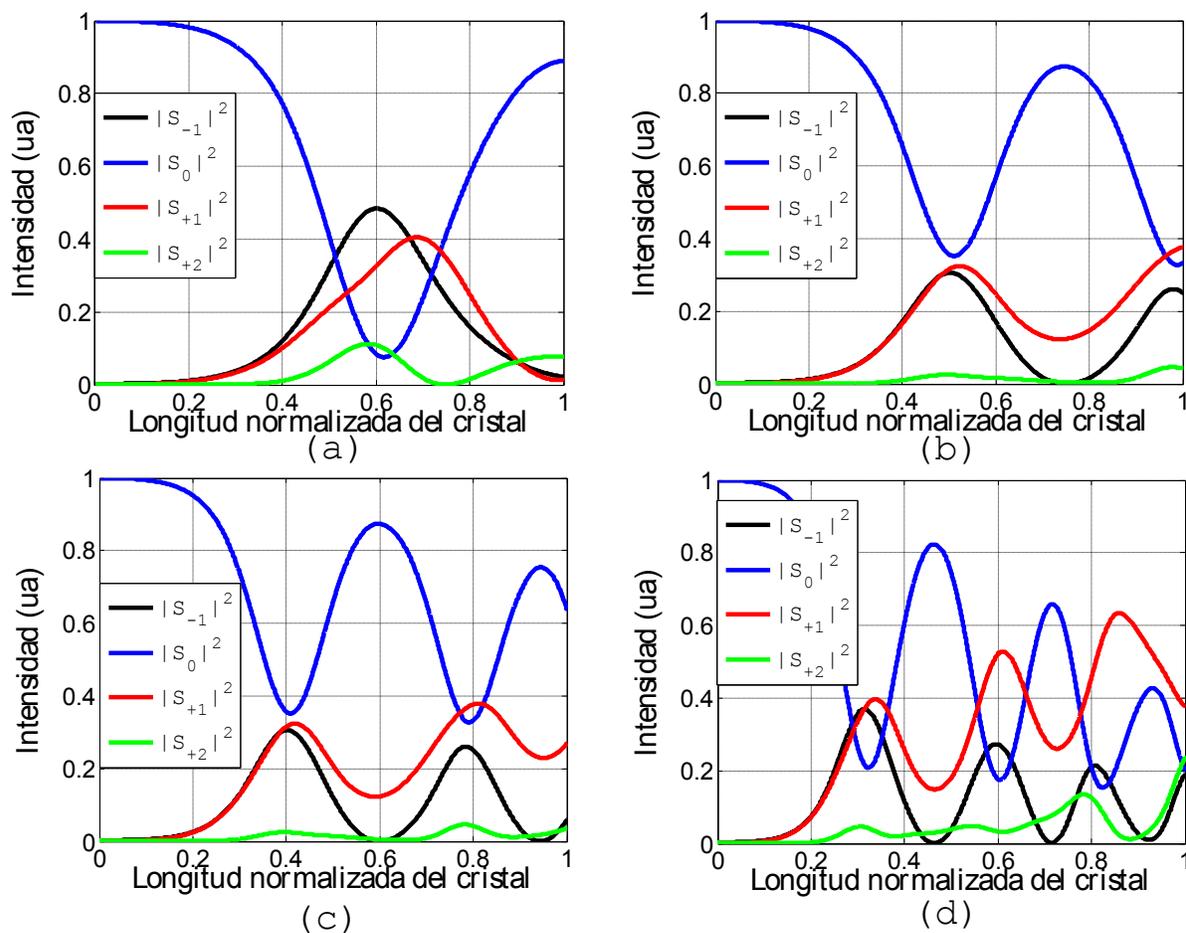


Figura 3.2: Mezcla de cuatro ondas para $\left| \frac{S_0}{S_{-1}} \right|^2 = 400$, $S_{+1} = 0$ y $S_{+2} = 0$, con: a) $\theta = 0.2$, $L_0 = 12\text{mm}$ y $E_0 = 15\text{KV/cm}$, b) $\theta = 0.3$, $L_0 = 12\text{mm}$ y $E_0 = 15\text{KV/cm}$, c) $\theta = 0.3$, $L_0 = 15\text{mm}$ y $E_0 = 15\text{KV/cm}$ y d) $\theta = 0.3$, $L_0 = 15\text{mm}$ y $E_0 = 20\text{KV/cm}$

los valores de Γ_{1L} , Γ_{2L} y Γ_{3L} , para cada una de las graficas son $\Gamma_{1L} = -7,4780 + 0,1526i$, $\Gamma_{2L} = -7,4687 + 0,3048i$, $\Gamma_{3L} = -7,4532 + 0,4563i$ para 3.2.a, $\Gamma_{1L} = -7,4741 + 0,2288i$, $\Gamma_{2L} = -7,4532 + 0,4563i$ $\Gamma_{3L} = -7,4186 + 0,6813i$ para 3.2.b $\Gamma_{1L} = -9,3427 + 0,2860i$ $\Gamma_{2L} = -9,3165 + 0,5704i$ $\Gamma_{3L} = -9,2733 + 0,8516i$ para 3.2.c y $\Gamma_{1L} = -12,4484 + 0,5005i$ $\Gamma_{2L} = -12,3885 + 0,9962i$ $\Gamma_{3L} = -12,2898 + 1,4824i$ para 3.2.d.

Para el caso de cinco ondas la matriz (3.18), se convierte en

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} S_{-1} \\ S_0 \\ S_{+1} \\ S_{+2} \\ S_{+3} \end{pmatrix} = -j \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{-1} \\ S_0 \\ S_{+1} \\ S_{+2} \\ S_{+3} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{21}^* &= \Gamma_1^* L [S_0^* S_{-1} + S_{+1}^* S_0 e^{j\psi_1 x} + S_{+2}^* S_{+1} e^{j(\psi_2 - \psi_1)x}] \\ &\quad + \Gamma_1^* L [S_{+3}^* S_{+2} e^{j(\psi_3 - \psi_2)x}] \\ a_{13} = a_{31}^* &= \Gamma_2^* L [S_{+1}^* S_{-1} + S_{+2}^* S_0 e^{j(\psi_2 - \psi_1)x}] \\ &\quad + \Gamma_2^* L [S_{+3}^* S_{+1} e^{j(\psi_3 - 2\psi_1)x}] \\ a_{14} = a_{41}^* &= \Gamma_3^* L [S_{+2}^* S_{-1} + S_{+3}^* S_0 e^{j(\psi_3 - \psi_2)x}] \\ a_{15} = a_{51}^* &= \Gamma_4^* L [S_{+3}^* S_{-1}] \\ a_{23} = a_{32}^* &= \Gamma_1^* L [S_0^* S_{-1} e^{-j\psi_1 x} + S_{+1}^* S_0] \\ &\quad + \Gamma_1^* L [S_{+2}^* S_{+1} e^{j(\psi_2 - 2\psi_1)x} + S_{+3}^* S_{+2} e^{j(\psi_3 - \psi_2 - \psi_1)x}] \\ a_{24} = a_{42}^* &= \Gamma_2^* L [S_{+1}^* S_{-1} e^{-j(\psi_2 - \psi_1)x} + S_{+2}^* S_0] \\ &\quad + \Gamma_2^* L [S_{+3}^* S_{+1} e^{j(\psi_3 - \psi_2 - \psi_1)x}] \\ a_{25} = a_{52}^* &= \Gamma_3^* L [S_{+2}^* S_{-1} e^{-j(\psi_3 - \psi_2)x} + S_{+3}^* S_0] \\ a_{34} = a_{43}^* &= \Gamma_1^* L [S_0^* S_{-1} e^{-j(\psi_2 - \psi_1)x} + S_{+1}^* S_0 e^{-j(\psi_2 - 2\psi_1)x}] \\ &\quad + \Gamma_1^* L [S_{+2}^* S_{+1} + S_{+3}^* S_{+2} e^{j(\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_1)x}] \\ a_{35} = a_{53}^* &= \Gamma_2^* L [S_{+1}^* S_{-1} e^{-j(\psi_3 - 2\psi_1)x} + S_{+2}^* S_0 e^{-j(\psi_3 - \psi_2 - \psi_1)x}] \\ &\quad + \Gamma_2^* L [S_{+3}^* S_{+1}] \\ a_{45} = a_{54}^* &= \Gamma_1^* L [S_0^* S_{-1} e^{-j(\psi_3 - \psi_2)x} + S_{+1}^* S_0 e^{-j(\psi_3 - \psi_2 - \psi_1)x}] \\ &\quad + \Gamma_1^* L [S_{+2}^* S_{+1} e^{-j(\psi_3 - 2\psi_2 - \psi_1)x} + S_{+3}^* S_{+2}] \end{aligned} \quad (3.24)$$

En la figura 3.3 se muestra la mezcla de cinco ondas para diferentes valores de $\delta\omega$.

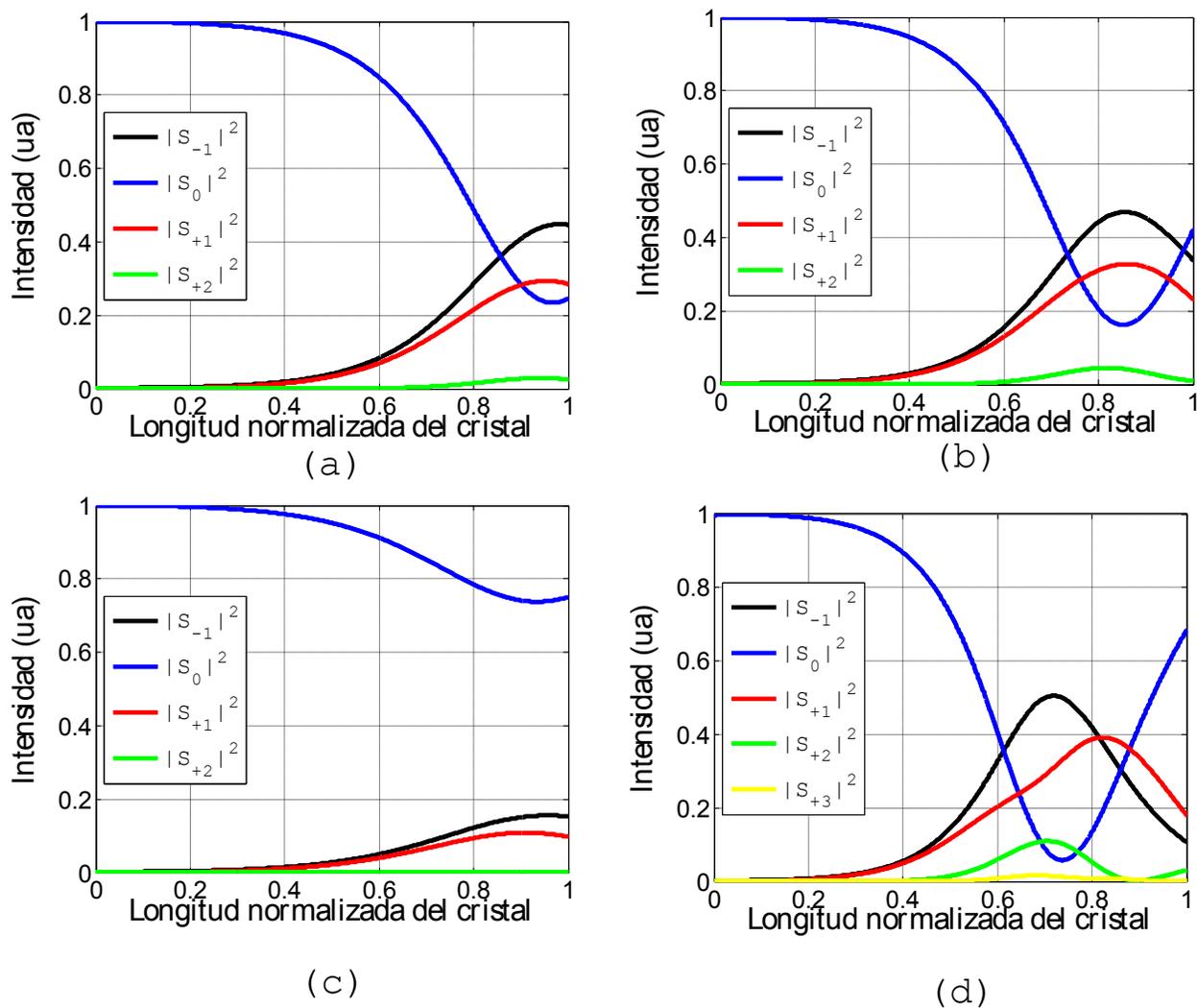


Figura 3.3: Mezcla de cuatro y cinco ondas para $\left|\frac{S_0}{S_{-1}}\right|^2 = 400$, $S_{+1} = 0$ y $S_{+2} = 0$, con
a) $\theta = 0.2$, $\delta\omega = 1$, b) $\theta = 0.2$, $\delta\omega = 0.5$, c) $\theta = 0.3$, $\delta\omega = 0.5$ y d) $\theta = 0.2$, $\delta\omega = 0.01$

Al incrementar el valor de $\delta\omega$ disminuye el número de armónicos formados, así como la amplitud de los mismos, nuevamente al incrementar el valor del ángulo theta, se desfavorece la formación de los armónicos, este es observado en las figuras 3.3.a-3.3.d.

Los valores de los parámetros off-bragg, para cada una de las graficas mostradas en la figura 3.3 son: $\psi_1 = 5.6346$, $\psi_2 = 16.9048$ para 3.3.a-3.3.c y $\psi_1 = 12.6784$, $\psi_2 = 38.0393$, $\psi_3 = 76.0911$ mientras que los valores de Γ_{1L} , Γ_{2L} y Γ_{3L} , son $\Gamma_{1L} = -4,1854 - 0,2949i$, $\Gamma_{2L} = -2,1179 - 0,1510i$, $\Gamma_{3L} = -1,1636 - 0,0683i$ para 3.3.a $\Gamma_{1L} = -5,0175 - 0,1699i$, $\Gamma_{2L} = -3,1679 - 0,1355i$, $\Gamma_{3L} = -1,9637 - 0,0781i$ para 3.3.b $\Gamma_{1L} = -4,0351 - 0,1649i$, $\Gamma_{2L} = 1,9637 - 0,0781i$, $\Gamma_{3L} = -1,0588 - 0,0340i$ para 3.3.c $\Gamma_{1L} = 6,1624 + 0,1752i$, $\Gamma_{2L} = -5,9569 + 0,3281i$, $\Gamma_{3L} = -5,6449 + 0,4434i$, $\Gamma_{4L} = -5,2618 + 0,5154i$ para 3.3.d respectivamente, en este caso el valor de longitud del cristal en cada una de las graficas es $L_0 = 10$ mm.

Cuando se consideran los términos cruzados de orden superior se llega a un sistema de ecuaciones, en el cual existe un número mayor de contribuciones para los armónicos de orden superior, lo cual mejora la solución tanto del campo de carga espacial, así como de las intensidades de los armónicos de orden superior, en este caso los conjuntos de ecuaciones (5.4-5.6) se modifican en:

$$\begin{aligned}
J_0 &= e\mu n_0 \\
0 &= e\mu(n_0 E_1 + n_1 E_0) - j\mu k K T n_1 - j\epsilon\delta\omega E_1 \\
0 &= e\mu(n_0 E_2 + n_1 E_1 + n_2 E_0) - 2j\mu k K T n_2 - 2j\epsilon\delta\omega E_2 \\
0 &= e\mu(n_0 E_3 + n_1 E_2 + n_2 E_1 + n_3 E_0) - 3j\mu k K T n_3 \\
&\quad - 3j\epsilon\delta\omega E_3
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
0 &= sI_0 (N_D - N_A^-) - \gamma_R N_A^- n_0 \\
-j\delta\omega N_{D1}^+ &= s(-I_0 N_{D1}^+ + I_1 N_D - I_1 N_A^-) \\
&\quad - \gamma_R (n_0 N_{D1}^+ + n_1 N_A^-) \\
-2j\delta\omega N_{D2}^+ &= s(-I_0 N_{D2}^+ - I_1 N_{D1}^+ + I_2 N_D - I_2 N_A^-) \\
&\quad - \gamma_R (n_0 N_{D2}^+ + n_1 N_{D1}^+ + n_2 N_A^-) \\
-2j\delta\omega N_{D3}^+ &= s(-I_0 N_{D3}^+ - I_1 N_{D2}^+ - I_2 N_{D1}^+ + I_3 N_D - I_3 N_A^-) \\
&\quad - \gamma_R (n_0 N_{D3}^+ + n_1 N_{D2}^+ + n_2 N_{D1}^+ + n_3 N_A^-)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

De las ecuaciones (3.25) y (3.26), se obtienen las expresiones para los coeficientes de los armónicos del campo de carga espacial en la forma:

$$E_1 = \frac{I_1}{I_0} \Omega_1 \tag{3.27}$$

$$E_2 = \left(\frac{I_2}{I_0} + j \frac{sI_1 \tau_d}{E_{M1}} E_1 + M_1 E_1^2 \right) \Omega_2 \tag{3.28}$$

$$E_3 = \left(\frac{I_3}{I_0} - jsI_2 \frac{\tau_d}{E_{M1}} E_1 - jsI_2 \frac{\tau_d}{E_{M2}} E_2 + M_2 E_1 E_2 + M_3 E_1^3 \right) \Omega_3 \tag{3.29}$$

donde

$$\begin{aligned}
M_1 &= -\frac{j}{E_{q1} - E_0 + jE_{D1}} \frac{1 - j\tau_d v K}{-E_0 + jE_{D2}} \\
M_2 &= \frac{j}{E_{q1} - E_0 + jE_{D1}} \frac{1 - j\tau_d v K}{-E_0 + jE_{D2}} + \frac{j}{E_{q1} - E_0 + jE_{D2}} \frac{1 - 2j\tau_d v K}{(-E_0 + jE_{D2})(-E_0 + jE_{D3})} \\
&\quad + \frac{1 - 2j\tau_d v K}{(-E_0 + jE_{D2})(-E_0 + jE_{D3})} \\
&\quad + \frac{1 - j\tau_d v K}{(-E_0 + jE_{D1})(-E_0 + jE_{D3})} \\
M_3 &= \frac{j}{E_{q1}} - \frac{1 - j\tau_d v K}{(-E_0 + jE_{D1})(-E_0 + jE_{D2})(-E_0 + jE_{D3})}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.2 Mezcla de N ondas con frecuencias diferentes

En el caso de N ondas la expresión para el campo eléctrico se escribe en forma similar a la descrita en la ecuación (3.1)

$$\tilde{E} = \sum_{-1}^{N-2} A_i e^{j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - w_i t)} \quad (3.31)$$

Con el campo eléctrico descrito de esta forma la expresión para el patrón de intensidad se obtiene de:

$$I = \tilde{E} \cdot \tilde{E}^* = \sum_{-1}^{N-2} A_i e^{j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - w_i t)} \cdot \sum_{-1}^{N-2} A_i^* e^{-j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - w_i t)} \quad (3.32)$$

Intensidad que puede ser reescrita en la forma

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^{N-1} I_i e^{j(iKz - i\delta\omega t)} \quad (3.33)$$

donde, $I_0 = \sum_{i=-1}^{N-2} A_i A_i^* I_i = \sum A_l A_m^* e^{-j(\psi_{ll} - \psi_{mm})}$, tal que $i = l - m$, y $ll, mm > 0$, los $\psi_{ll, mm}$, son los términos de desajuste(off-Bragg).

Remplazando en las ecuaciones de Kukhtarev se obtiene

$$\begin{aligned} J_0 = & e\mu \left(n_0 + \sum_{i=1}^{N-1} n_i e^{j(iKz - i\delta\omega t)} \right) \left(E_0 + \sum_{i=1}^{N-1} E_i e^{j(iKz - i\delta\omega t)} \right) \\ & - \mu k T i K j \sum_{i=1}^{N-1} n_i e^{j(iKz - i\delta\omega t)} - \epsilon i j \delta\omega \sum_{i=1}^{N-1} E_i e^{j(iKz - i\delta\omega t)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
& -ij\delta\omega \sum_{i=1}^{N-1} N_{D_i}^+ e^{j(iKz-i\delta\omega t)} = s \left(I_0 + \sum_{i=1}^{N-1} I_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \right) \\
& \left(N_D - N_{D_0}^+ - \sum_{i=1}^{N-1} N_{D_i}^+ e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \right) \\
& -\gamma_R \left(n_0 + \sum_{i=1}^{N-1} n_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \right) \left(N_{D_0}^+ + \sum_{i=1}^{N-1} N_{D_i}^+ e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \right)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$ijK\epsilon \sum_{i=1}^{N-1} E_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} = e \left(N_{D_0}^+ - N_A^- + \sum_{i=1}^{N-1} N_{D_i}^+ e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \right) \tag{3.36}$$

Igualando los términos que poseen exponentes iguales se obtiene un grupo de ecuaciones que proporcionan el campo de carga espacial.

$$J_0 = e\mu n_0 E_0 \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
0 = & e\mu E_0 \sum_{i=1}^{N-1} n_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} + e\mu n_0 \sum_{i=1}^{N-1} E_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \\
& + e\mu \sum_{i=1}^{N-1} n_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \sum_{i=1}^{N-1} E_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \\
& - \mu k T i K j \sum_{i=1}^{N-1} n_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} - eij\delta\omega \sum_{i=1}^{N-1} E_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$0 = sI_0 (N_D - N_{D_0}^+) - \gamma_R n_0 N_{D_0}^+ \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
& -ij\delta\omega \sum_{i=1}^{N-1} N_{Di}^+ e^{j(iKz-i\delta\omega t)} = s (N_D - N_{D0}^+) \sum_{i=1}^{N-1} I_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \\
& -sI_0 \sum_{i=1}^{N-1} N_{Di}^+ e^{j(iKz-i\delta\omega t)} - s \sum_{i=1}^{N-1} I_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \sum_{i=1}^{N-1} N_{Di}^+ e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \\
& -\gamma_R n_0 \sum_{i=1}^{N-1} N_{Di}^+ e^{j(iKz-i\delta\omega t)} - \gamma_R N_{D0}^+ \sum_{i=1}^{N-1} n_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \\
& -\gamma_R \sum_{i=1}^{N-1} n_i e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \sum_{i=1}^{N-1} N_{Di}^+ e^{j(iKz-i\delta\omega t)} \tag{3.40}
\end{aligned}$$

$$N_{D0}^+ = N_A^- \tag{3.41}$$

$$ijK\epsilon E_i = eN_{Di}^+ \tag{3.42}$$

Si se toman las ecuaciones (3.38), (3.41) y (3.42) se llega a

$$n_i = \frac{e\mu E_0 - ij\epsilon\delta\omega}{-e\mu n_0 + ij\mu kKT} E_i \tag{3.43}$$

Al remplazar en (5.40), se llega a la expresión del campo de carga espacial

$$E_i = \frac{I_i}{I_0} \frac{(-E_0 + jE_{Di}) E_{qi}}{E_{qi} + E_{Di} + jE_0 - ijKv\tau_d \frac{E_{qi}}{E_{Mi}} (E_{Mi} + E_{Di} + jE_0)} \tag{3.44}$$

donde

$$E_{Di} = \frac{iKtk}{e}, E_{qi} = \frac{eN_A^-}{\epsilon iK}, E_{Mi} = \frac{\gamma_R N_A^-}{\mu iK}, v = \frac{\delta\omega}{K} \text{ y } \tau_d = \frac{\epsilon}{n_0 e\mu} \tag{3.45}$$

La variación de la permitividad

$$\Delta\epsilon_r = -r\epsilon_r^2 \left(E_0 + \sum_{i=1}^{N-1} E_i e^{ij(Kz-\delta\omega t)} + c.c \right) \tag{3.46}$$

Expresión que es remplazada en la ecuación de ondas (3.13) obteniéndose un sistema de ecuaciones diferenciales, similar a los sistemas (3.18) y (3.23), con la diferencia que este es para cualquier número de ondas, este sistema es solucionado numéricamente.

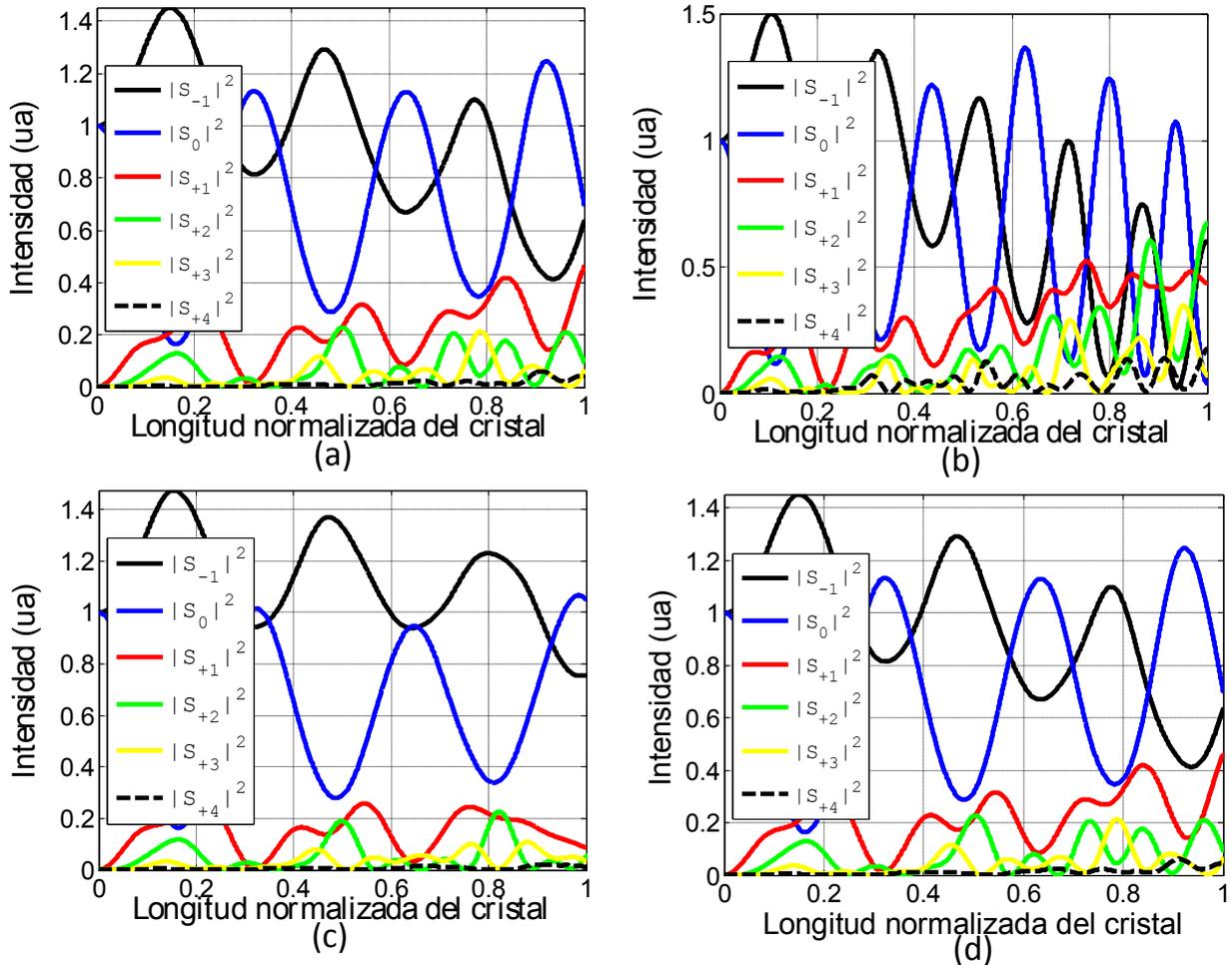


Figura 3.4: Mezcla de seis ondas con una longitud del cristal $L_0 = 10\text{mm}$, con a) $r = 4 \times 10^{12}$, $\epsilon_s = 56$ y $T = 300^\circ\text{K}$, b) $r = 6 \times 10^{12}$, $\epsilon_s = 56$ y $T = 300^\circ\text{K}$, c) $r = 4 \times 10^{12}$, $\epsilon_s = 28$ y $T = 300^\circ\text{K}$, y d) $r = 4 \times 10^{12}$, $\epsilon_s = 56$ y $T = 360^\circ\text{K}$

Las graficas 3.4, 3.5 y 3.6 son ejemplos de la mezcla de seis y diez ondas.

Cuando se incrementa el valor del coeficiente electroóptico del cristal, aumenta el número de armónicos formados y también la amplitud de estos mismos, en las figuras 3.4.a y 3.4.b se incremento el valor del coeficiente electroóptico de 4×10^{12} a 6×10^{12} , se puede concluir que en la figura 3.4.b se produce mayor transferencia de las ondas que

inciden inicialmente a las ondas generadas dentro del cristal debido al aumento del coeficiente electroóptico, un efecto semejante se encuentra con la variación de la constante dieléctrica, debido a que con su disminución existe menor amplitud en los armónicos formados.

Cuando se cambia el valor de la temperatura de $300^{\circ}K$ a $360^{\circ}K$, como se puede observar en las figuras 3.4.a y 3.4.d, la amplitud de las oscilaciones y la formación de armónicos no se ven afectados.

Al incrementar la diferencia entre los valores iniciales de las ondas incidentes, se desfavorece la formación de armónicos, es decir al aumentar $\left| \frac{S-1}{S_0} \right|^2$, el cual posee valores de 5, 2, 1 y 0.5 en las figuras 3.5.a-3.5.d respectivamente.

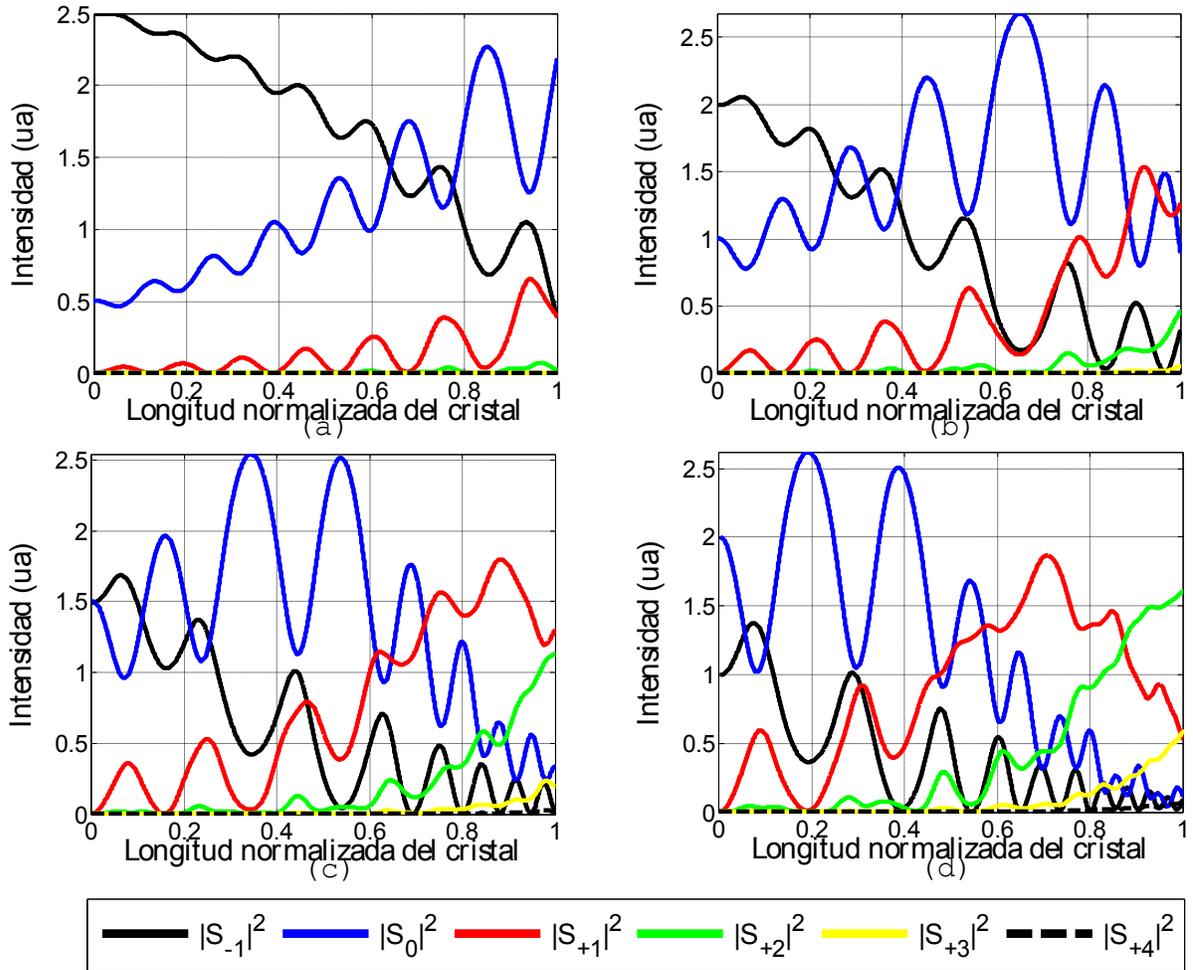


Figura 3.5: Mezcla de seis ondas para diferentes valores iniciales de las ondas incidentes
a.) $|S_{-1}|^2 = 2,5$, $|S_0|^2 = 0,5$, $|S_{+1}|^2 = |S_{+2}|^2 = |S_{+3}|^2 = |S_{+4}|^2 = 0$, b) $|S_{-1}|^2 = 2,0$, $|S_0|^2 = 1,0$, $|S_{+1}|^2 = |S_{+2}|^2 = |S_{+3}|^2 = |S_{+4}|^2 = 0$, c) $|S_{-1}|^2 = 1,5$, $|S_0|^2 = 1,5$, $|S_{+1}|^2 = |S_{+2}|^2 = |S_{+3}|^2 = |S_{+4}|^2 = 0$ y d) $|S_{-1}|^2 = 1,0$, $|S_0|^2 = 2,0$, $|S_{+1}|^2 = |S_{+2}|^2 = |S_{+3}|^2 = |S_{+4}|^2 = 0$

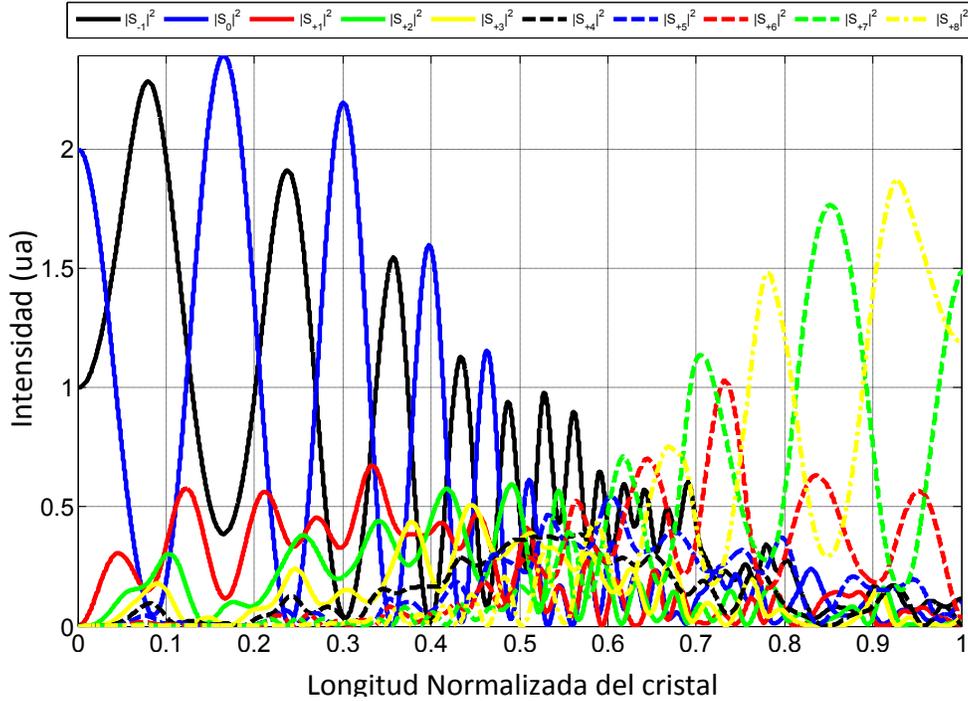


Figura 3.6: Mezcla de diez ondas con: $\frac{S_0}{S_{-1}} = 2$, $S_{+1} \cdots S_{+8} = 0$, $\theta = 0,2$, $r = 6 \times 10^{12}$

Cuando se incrementa el valor del coeficiente electroóptico se incrementan los armónicos así como las amplitudes de los mismos, el mismo efecto se logra cuando se disminuye el ángulo theta, el efecto conjunto de estos dos parámetros se puede observar en la figura 4 en la cual se ha tomado un valor del coeficiente electroóptico igual a $r = 6 \times 10^{12}$ y un ángulo $\theta = 0.2$

3.3 Funcionamiento del software utilizado para la mezcla de N ondas

El software diseñado para el análisis de la mezcla de N ondas en un medio fotorrefractivo, consta de seis etapas básicas, la primera de éstas es la obtención de los terminos off Bragg, la cual fue realizad basados en el modelo descrito en el artículo de la referencia[28], como segunda etapa el calculo de los coeficientes $I_1, I_2 \dots I_N$ de la ecuación 3.3.

Como siguiente etapa se deben calcular, los coeficientes del campo de carga espacial con la ayuda de las ecuaciones 3.11 y 3.12, para lo cual se necesitan los parametros del material, teniendo los coeficientes de las intensidades y del campo de carga espacial, se calculan los terminos que componen la matriz de transferencia del sistema, como las

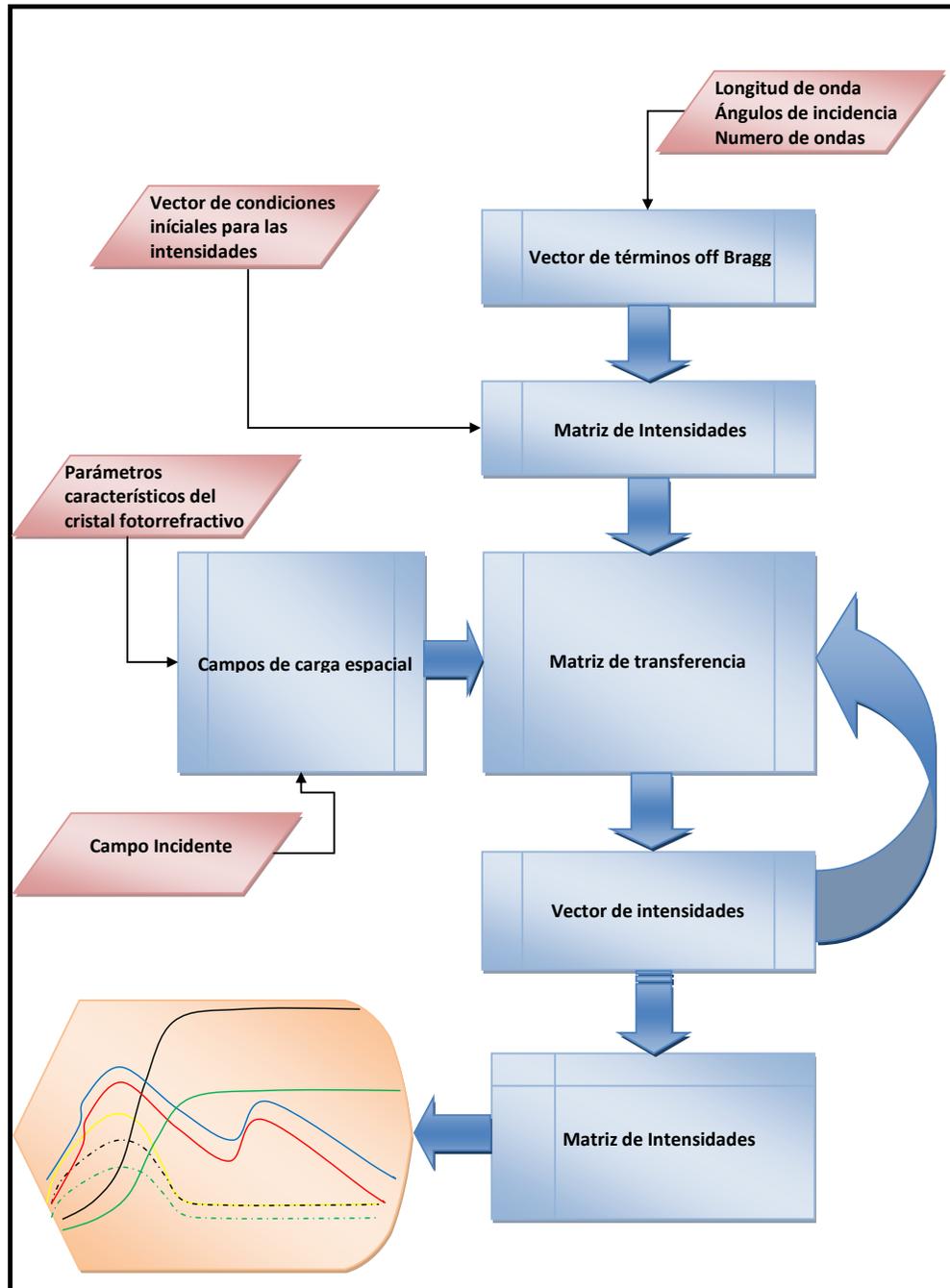


Figura 3.7: Diagrama de flujo del software desarrollado para la mezcla de N ondas

ecuaciones 3.18, 3.19, 3.23 y 3.24, pero en este caso para N ondas.

Utilizando todos los calculos realizados se calculan las intensidades de las ondas para cada uno de los puntos definidos en la longitud del cristal, los cuales se almacenan en una matriz final.

Finalmente con la matriz de intensidades se realiza la grafica de las intensidades, para cada una de las ondas correspondientes, los parametros utilizados para generar las figuras 3.2-3.5, son los especificados en el cuadro 3.1.

Parametros	Valor	Unidades
N_A	0.95×10^{22}	m^{-3}
N_D	1×10^{25}	m^{-3}
μ	1×10^{-5}	
γ_R	1.65×10^{-17}	
r	$4 \times 10^{-12} - 6 \times 10^{-12}$	
ϵ_s	28-56	
ϵ_r	6.86	
ϵ_0	8.85×10^{-12}	$C^2 / (N \cdot m^2)$
e	1.602×10^{-19}	C
k	1.3805×10^{-23}	$J/^\circ K$
E_0	15-20	KV
T	300-360	$^\circ K$
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	$T \cdot m/A$
c	3×10^8	m/s
$\delta\omega$	1×10^{-20}	rad/s
λ	543.3×10^{-9}	m
$\delta\omega$	0-1	rad/s

Tabla 3.1: Parametros utilizados

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

Esta investigación se abordó dentro de una metodología con énfasis teórico sobre la mezcla de ondas en materiales fotorrefractivos.

En el capítulo 1 se obtienen expresiones de los campos de carga espacial para iguales frecuencias y diferentes frecuencias, utilizando una solución lineal del modelo.

En el capítulo 2 se obtuvo una solución de la mezcla de ondas contradireccional, la cual no se encuentra en la bibliografía y que es muy útil para el análisis de la formación de hologramas por transmisión, de esta solución se puede decir que el parámetro que define cuál de las dos ondas incidentes le transfiere energía a otra es el término η , el cual a su vez depende de la dirección del eje electroóptico del cristal sobre el cual inciden las ondas.

Finalmente en el capítulo 3 se desarrolló un software para el estudio numérico de la mezcla de N ondas en un medio fotorrefractivo, con el cual se puede concluir que cuando se aumenta el ángulo de incidencia, se desfavorece la formación de armónicos, de forma similar cuando disminuye el coeficiente electroóptico del cristal fotorrefractivo disminuye la amplitud de salida de los armónicos formados dentro del cristal, otros parámetros que desfavorecen la formación de armónicos son la disminución de la constante dieléctrica, el aumento del parámetro $\delta\omega$ y el aumento del espesor del cristal, por otra parte con el aumento del ángulo de incidencia disminuyen las oscilaciones presentadas en las ondas mezcladas dentro del cristal fotorrefractivo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A.Ashkin, G.D.Boyd, J.M.Dziedzic, R.G.Smith, A.A.Ballman, J.J.Levinstein, and K.Nassau, *Optically-Induced Refractive Index Inhomogeneities in LiNbO₃*, *Applied Physics Letters Vol.9,Nº 1* ,Julio (1966).
- [2] H. Kogelnik, *Couplet Wave Theory for Thick Hologram Gratings*, *Bell Syst. Tech.J. 48*, 2909(1969).
- [3] D.L. Staebler and J.J. Amodei, *Couplet Wave Analysis of Holographic Storage in LiNbO₃*, *J. Appl. Phys.34*, 1042(1972).
- [4] D.L. Staebler and J.J. Amodei, *Thermally Fixed Holograms in LiNbO₃*, *Ferroelectrics 3*, 107(1972).
- [5] D.L. Staebler and W.Phillips, *Fe-Doped LiNbO₃ for Read-Write Applications*, *Appl. Opt. 13*, 788(1974).
- [6] D.W. Vahey, *A Nonlinear Coupled Wave Theory of Holographic Storage in Ferroelectric Materials*, *J. Appl. Phys. 46*, 3510(1975).
- [7] A. M.Glass, *The Photorefractive Effect*, *Opt. Eng.17*,470(1978).
- [8] N.V Kukhtarev, V.B. Markov,S.G. Odulov, M.S. Soskin and V.L.Vinetskii, *Holographic Storage in Electro-Optic Crystals. I. Steady State*, *Ferroelectrics 22*, 949(1979).
- [9] N.V Kukhtarev, V.B. Markov,S.G. Odulov, M.S. Soskin and V.L.Vinetskii, *Holographic Storage in Electro-Optic Crystals. II. Beam Coupling and Light*

- Amplification,"Ferroelectrics 22, 961(1979).*
- [10] N.V Kukhtarev, V.B. Markov,S.G. Odulov and M.S. Soskin , "*Dynamic Self-Diffraction of coherent Light Beams,"Sov. Phys. Usp. 22, 742(1979).*
- [11] J. Feinberg, D. Heiman, A.R. Tanguay, Jr., and R.W. Hellwarth, "*Photorefractive Effects and Light-Induced Charge Migration in Barium Titanate,"J. Appl. Phys. 51, 1297(1980).*
- [12] J.P.Huignard and A.Marrakcki, "*Two Wave Mixing and Energy Transfer in Bi₁₂SiO₂₀ Crystals: Application to Image Amplification and Vibration Analysis ,.°pt. Lett. 6, 622(1981).*
- [13] P. Yeh, "*Contra-Directional Two-Wave Mixing in Photorefractive media,.°pt. Comm. 45, 323(1983).*
- [14] G.C. Valley, "*Two-Wave Mixing with an Applied Field and a Moving Grating,"J. Opt. Soc. Am. B1, 868(1984).*
- [15] Ph. Refregier,L. Solymar, H.Rajbenbach,and J.P. Huignard, "*Two-Beam Coupling in Fotorefractive Bi₁₂SiO₂₀ Crystals with Moving Gratings: Theory and Experiments,"J. Appl. Phys. 58, 45(1985).*
- [16] J.M.Heaton and L.Solymar, "*Transient Energy Transfer During Hologram Formation in Fotorefractive Crystals,.°ptica Acta 32, 397(1985).*
- [17] P. Yeh, "*Two Wave Mixing in Nonlinear Media,IEEE J.Quantum Electron. 25, 484(1989).*
- [18] M.Cronin-Golomb, J.O.White, B.Fischer, and A.Yariv, "*Exact Solution of a Nonlinear Model of Four-Wave Mixing and Phase Conjugation,.°ptical Letter 7,313 (1982).*
- [19] M.Cronin-Golomb, J.O.White, B.Fischer, and A.Yariv, "*Theory and Applications of Four-Wave Mixing in Photorefractive Media,IEEE J. Quantum Electron QE-20, 12 (1984).*

- [20] N.V.Kukhtarev, T.I.Sememnets, K.H.Ringhofer, and G.Tomberger, "Phase Conjugation by reflection Gratings in Electro-Optic Crystals," *J. Appl. Phys.* B41, 259(1986).
- [21] A.Bledowski and W.Krolikowski, "Exact Solution of Degenerate Four-Wave Mixing in Photorefractive Media," *Opt. Lett.* 13, 146 (1988).
- [22] R.Saxena, C.Gu, and P.Yeh, "Properties of Photorefractive Gratings with Complex Coupling Constants," *J. Opt. Soc. Am. B*8, 1047 (1991).
- [23] C.Gu, and P.Yeh, "Reciprocity in photorefractive Wave Mixing," *Opt. Lett.* 16, 455 (1991).
- [24] P.Stojkov, and M.Belic, "Symmetries of photorefractive Four-Wave Mixing," *Phys. Rev. A*45, 5061 (1992).
- [25] P. Yeh, "Photorefractive Phase Conjugation," *Proc. IEEE.* 80, 436 (1992).
- [26] Jinsong Liu, "Separate spatial soliton pairs and solitons interaction in an unbiased series photorefractive crystal circuit," *Physics Letters A*, 300 (2002).
- [27] Baohong Yuan, Xiudong Sun, Yongyuan Jiang, Zhongxiang Zhou, Chunfeng Hou, and Yan Li, "Comparisons between two models of the formation of space charge field in photorefractive polymers," *Physics Letters A* 292 (2002).
- [28] Ángel R. Salazar and Jorge E. Rueda, "Modification of the exchange of energy in BSO at equal optimized coupling constant," *Optics Communications* 212,191 (2002).
- [29] Jorge Enrique Rueda, Myrian Tebaldi, Sergio Granieri, and Nestor Bolognini, "Implementation of a photorefractive correlator based on a fake zoom lens," *Optik* 113, No. 7, 309 (2002).
- [30] Kimmo Paivasaaria, Alexei A. Kamshilina, Philippe Delayeb, and Gerald Roosenb, "Reduction of the space-charge field in photorefractive crystals," *Optics Communications* 213, 357 (2002).

- [31] R.Fujimura, E.Kubota, O.Matoba, T.Shimura, K.Kuroda, "Photorefractive and photochromic properties of Ru doped Sr0:61Ba0:39Nb2O6 crystal," *Optics Communications* 213, 373 (2002).
- [32] Jianlin Zhaoa, Qitui Xua, Wangmin Zhoua, Dongsheng Yanga, S. Kapphanb, and R. Pankrathb, "Photorefractive edge-enhancement joint transform correlator," *Optics Communications* 212, 287 (2002).
- [33] V. Matusevich, A. Kiessling, E. Weidner, and R. Kowarschik, "Ring self-pumped phase-conjugate mirror with a photorefractive Ba0 : 77Ca0 : 23TiO₃ crystal as an active medium," *Optics Communications* 210, 107 (2002).
- [34] Sebastien Maertena, Nicolas Dubreuil, Gilles Pauliat, Gerald Roosen, Daniel Rytz, and Thierry Salva, "Laser diode made single-mode by a self-adaptive photorefractive filter," *Optics Communications* 208, 183 (2002).
- [35] Hong Gao, Jiasen Zhang, Shin Yoshikado, and Tadashi Aruga, "Photorefractive low-pass temporal filter," *Optics Communications* 203, 363 (2002).
- [36] Myrian Tebaldi, Alberto Lencina, Nestor Bolognini, "Analysis and applications of the speckle patterns registered in a photorefractive BTO crystal," *Optics Communications* 202, 257(2002).
- [37] F.A. Rustamov, S.R. Muradov, V.K. Sharbatov, "A simple analytic solution for transient simultaneous four-wave mixing in photorefractive crystals," *Optics Communications* 201, 191 (2002).
- [38] Meng He, Robert Twieg, Ulrich Gubler, Daniel Wright, and W.E. Moerner, "Synthesis and properties of glassy organic multifunctional photorefractive materials," *Optical Materials* 21, 353 (2002).
- [39] FuRi Ling, Biao Wang, Tao Geng, ShuangQuan Fang, Teng DongDong, Wei Yuan, and ChengXiang Guan, "Nonvolatile two-color photorefractive holographic recording in In : Ce : Cu : LiNbO₃," *Optik* 114, No. 12, 548 (2003).
- [40] Baolai Liang, Qinglin Guo, Guangsheng Fu, and Zhaoqi Wang, "Fidelity holographic recording in a Ce:KNSBN crystal with incoherent erasing technique," *Optik* 114, No. 11, 515 (2003).

- [41] M.P. Petrov, V.V. Bryksin, F. Rahe, C.E. Reuter b, E. Kreatzig, "Space charge wave rectification effects in photorefractive $Bi_{12}TiO_{20}$ crystals," *Optics Communications* 227, 183 (2003).
- [42] C.H. Yang a, Y.J. Guo, and B. Wang, "Photorefractive properties of Mn doped $K_3Li_2Nb_5O_{15}$ crystal," *Optics Communications* 225, 383 (2003).
- [43] D. Wolfersberger, F. Lhomme, N. Fressengeas, and G. Kugel, "Simulation of the temporal behavior of one single laser pulse in a photorefractive medium," *Optics Communications* 222, 383 (2003).
- [44] Angel Salazar, Myrian Tebaldib, and Nestor Bologninib, "Experimental study of volume speckle in four-wave mixing arrangement," *Optics Communications* 221, 249 (2003).
- [45] F.R. Linga, B. Wanga, T. Genga, S.Q. Fanga, W. Yuana, D.D. Tenga, and C.X. Guanb, "Nonvolatile photorefractive holographic recording in $Sc : Ce : Cu : LiNbO_3$," *Optics Laser Technology* 36, 541 (2004).
- [46] L.Z. Cai, Q. Liu, Y.R. Wang, and X.L. Yang, "Photorefractive shearing interferometer," *Optics and Lasers in Engineering* 41, 529 (2004).
- [47] Zhijie Sun, Hongtao Li, Wei Cai, and Liancheng Zhao, "Studies of photorefractive fields of MnO doped nearstoichiometric $LiNbO_3$ crystals," *Optics Communications* 242, 253 (2004).
- [48] A. Salazar, R. Góez, D. Sierra, J. Garzón, F. Pérez, and H. Lorduy, "Optical wavelet correlator by four-wave mixing via reflection holograms in a BSO crystal," *Optics Communications* 239, 287 (2004).
- [49] Liyong Ren, Liren Liu, De'an Liu, Baoli Yao, "Dynamic characteristics of holographic recording and fixing in $LiNbO_3 : Ce : Cu$ crystal," *Optics Communications* 238, 363 (2004).
- [50] Myrian Tebaldi, Nestor Bolognini, and Luis Arizmendi, "Fixing of speckle distribution recorded in $LiNbO_3$ crystals," *Optics Communications* 234, 43 (2004).

- [51] Xiudong Sun, Qingxin Meng, Chunfeng Hou, Dewei Gong, Suhua Luo, and Zhongxiang Zhou, "The effect of reduction treatment on the photorefractive properties of Zn : Fe : LiNbO₃ crystal," *Optics Communications* 247, 233 (2005).
- [52] M.R.R. Gesualdi, D. Soga, and M. Muramatsu, *Real-time holographic interferometry using photorefractive sillenite crystals with phase-stepping technique*, *Optics and Lasers in Engineering* 44, 56 (2006).
- [53] R. Incea, H. Yu kselicib, A.T. Ince, *Crystal diffraction grating in LiNbO₃ : Fe derived from interferometric volume holography*, *Optics and Lasers in Engineering* 44, 509 (2006).
- [54] K.W. Chow, Boris A. Malomed, and K. Nakkeeran, *Exact solitary- and periodic-wave modes in coupled equations with saturable nonlinearity*, *Physics Letter A* 359,37 (2006).
- [55] Isabel Casar, José G. Murillo, Luis Fernando Magana, "Diffraction efficiency of non-uniform gratings in a Bi₁₂SiO₂₀ crystal for a non-linear regime under an external d.c. field," *Physics Letters A* 352, 416 (2006).
- [56] Hisatoshi Funakoshi, Atsushi Okamoto, *Experiment on long-term readout of binarized image in photorefractive memory with double mutually pumped phase conjugators*, *Optics Laser Technology* 38, 604 (2006).
- [57] Shuangquan Fang, Decai Ma, Tao Zhang, Furi Ling, Biao Wang, "Growth and optical properties of Mg, Fe Co-doped LiTaO₃ crystal," *Optik* 117, 72 (2006).
- [58] Dengsong Zhu, Jingjun Xu, Haijun Qiao, Yanli Shi, Feng Gao, Wei Li, Bo Fu, Guaquan Zhang, Ke Zheng, *Ultraviolet photorefractive effect in Mg-doped near-stoichiometric LiNbO₃*, *Optics Communications* 266, 582 (2006).
- [59] T.H. Zhang, B.H. Wang, X.K. Ren, W.W. Shao, Y.H. Xu, Z.J. Hu, H.Z. Kang, J. Yang, L. Feng, F. Jia, R. Guo, and J.J. Xu, *Influence of the external field on photorefractive surface waves*, *Optics Communications* 265, 649 (2006).
- [60] U. Bortolozzo, S. Residori, A. Petrosyan, J.P. Huignard, "Pattern formation and direct measurement of the spatial resolution in a photorefractive liquid crystal light valve," *Optics Communications* 263, 317 (2006).

- [61] E.A. Barbosa, R. Verzini, and J.F. Carvalho, "Multi-wavelength holography in $Bi_{12}TiO_{20}$ crystals: Applications in refractometry," *Optics Communications* 263, 189 (2006).
- [62] Angel Salazar, Héctor Lorduy, Myrian Tebaldi, Nestor Bolognini, "Analysis of reflection speckle holograms in a BSO crystal," *Optics Communications* 262, 157(2006).
- [63] N. Khelifaoui, D. Wolfersberger, G. Kugel, N. Fressengeas, M. Chauvet, "Temporal behavior of two-wave-mixing in photorefractive InP:Fe versus temperature," *Optics Communications* 261, 169 (2006).
- [64] Yi Pang, O.D., Ph.D.,a and Terri Rose, O.D, "Rapid growth of pterygium after photorefractive keratectomy," *Optometry* 77, 77 (2006).
- [65] M.R.R. Gesualdi, D. Soga, and M. Muramatsu, "Surface contouring by phase-shifting real-time holography using photorefractive sillenite crystals," *Optics Laser Technology* 39, 98 (2007).
- [66] Atsushi Okamotoa, Satoshi Honmab, Shunsuke Uemuraa, Terumasa Ito, "Mutually pumped phase conjugate mirror using cross polarized photorefractive coupling," *Optics Laser Technology* 39, 881 (2007).
- [67] Dewei Gong, Zhongxiang Zhou, Qingxin Meng, Chunfeng Hou, "Higher-order diffraction images in photorefractive materials," *Optics and Lasers in Engineering* 45, 170 (2007).
- [68] Guangyong Zhanga, Jinsong Liu, Huilan Zhang, Cheng Wang, and Shixiong Liu, "Higher-order space-charge field effects on the self-deflection of photovoltaic dark spatial solitons," *Optik* 118, 440 (2007).
- [69] Fang-Wen Sheu, and Ming-Feng Shih, "Spatial coherence of an optical turbulent beam in a biased photorefractive crystal due to the spatiotemporal modulation instability," *Optics Communications* 278, 187 (2007).
- [70] Yexia Fan, Hongtao Li, Fengyun Guo, Yuheng Xu, and Liancheng Zhao, "Structure and nonvolatile holographic recording of Mg : Ce : Cu : LiNbO₃ crystals," *Optics Communications* 278, 413 (2007).

- [71] P. Arora, V.M. Petrov, J. Petter, and T. Tschudi, "Detection of higher nonlinear harmonics of volume photorefractive gratings in reflection geometry," *Optics Communications* 278, 423 (2007).
- [72] Ravinder Kumar Banyal a, B. Raghavendra Prasad, "Holographic recording in Fe:Ce:Ti doped LiNbO₃ crystal," *Optics Communications* 274, 300 (2007).
- [73] Anatoliy A. Savchenkov, Andrey B. Matsko, Dmitry Strekalov, Vladimir S. Ilchenko, and Lute Maleki, "Photorefractive damage in whispering gallery resonators," *Optics Communications* 272, 257(2007).
- [74] Vera Marinova, Dimitrina Petrova, Shiuan Huei Lin, Ken Yuh Hsu, "Optical and holographic properties of Fe+Mn³⁺ co-doped Bi₄Ge₃O₁₂ crystals," *Optics Communications*, articulo en prensa (2007).
- [75] Zhaopeng Xu, "Growth and photorefractive properties of Mg:Ce:Fe:LiNbO₃ crystals," *Optical Materials*, articulo en prensa (2007).
- [76] Yexia Fan, Hongtao Li, and Liancheng Zhao, "Investigation on structure and photorefractive properties of Mg : Ce : Cu : LiNbO₃ crystals with various [Li]/[Nb] ratios," *Optical Materials*, articulo en prensa(2007).
- [77] Zhijie Sun, Xili Lu, and Hongtao Li, "Studies of photorefractive properties of different oxidation state of MnO doped near stoichiometric LiNbO₃ crystals," *Optical Materials*, articulo en prensa (2007).
- [78] Ángel Salazar, and Héctor Lorduy G, "Approach to wavelet multiresolution analysis using Coiflets and a two-wave mixing arrangement," *Optics Communications*, 281 3091(2008).
- [79] Zhaohong Liu, Simin Liu, Ru Guo, Yuanmei Gao, Xinyuan Qi, Lipeng Zhou, and Yuan Li, "Modulation instability with incoherent white light in self-defocusing photorefractive crystal," *Optics Communications*, 281 3171(2008).
- [80] Esa Jaatinen, and Michael W. Jones, "Theoretical description of low divergence Gaussian fields in self-defocusing photorefractive media," *Optics Communications*, 281 3201(2008).

- [81] M.R. Sayeh, and J.W. Park, "Spinning-top dynamics of photorefractive grating, *Optics Communications*, 281 2309(2008).
- [82] Kwan Jeong, John J. Turek, Michael R. Melloch, and David D. Nolte, "Functional imaging in photorefractive tissue speckle holography, *Optics Communications*, 281 1860(2008).
- [83] P. Arora, V.M. Petrov, J. Petter, and T. Tschudi, "Fast electrically switchable holographic optical elements in LiNbO_3 , *Optics Communications*, 281 1455(2008).
- [84] Hao Tian, Zhongxiang Zhou, Dewei Gong, Haifeng Wang, Yongyuan Jiang, and Chunfeng Hou, "Photorefractive properties of paraelectric potassium lithium tantalate niobate crystal doped with iron, *Optics Communications*, 281 1720(2008).
- [85] T.H. Zhang, W.W. Shao, K. Li, X.S. Liu, and J.J. Xu, "TE, TM modes photorefractive surface waves and their coupling, *Optics Communications*, 281 1286(2008).
- [86] R. Aleksiejunas, A. Kadys, T. Malinauskas, K. Neimontas, V. Gudelis, K. Jarasiunas, P. Fochuk, and P. Feychuk, "Advantages of the time-resolved four-wave mixing technique for studies of non-equilibrium carrier dynamics in bulk semiconductors and structures, *Optical Materials*, 30 780(2008).
- [87] L.F. Magaña, I. Casar, and J.G. Murillo, "Beam energy exchange in sillenite crystals ($\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ and $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$), considering the variation of light modulation along sample thickness in a strong non-linear regime, *Optical Materials*, 30 979(2008).
- [88] R. Aleksiejunas, A. Kadys, T. Malinauskas, K. Neimontas, V. Gudelis, K. Jarasiunas, P. Fochuk, and P. Feychuk, "Advantages of the time-resolved four-wave mixing technique for studies of non-equilibrium carrier dynamics in bulk semiconductors and structures, *Optical Materials*, 30 780(2008).
- [89] Dewei Gong, Zhongxiang Zhou, Hao Tian, Jianlong Zhang, and Qingxin Meng, "Higher diffraction order photorefractive optical beam splitter, *Optics Laser Technology*, 40 481(2008).
- [90] D.R. Evans, G. Cook, and M.A. Saleh, "Recent advances in photorefractive two-beam coupling, *Optical Materials*, articulo en prensa (2008).

- [91] Dewei Gong, Zhongxiang Zhou, Yanbo Pei, Jianlong Zhang, and Fengfeng Yao, "The coupling and superposition behavior of higher-order diffraction image based on photorefractive nematic liquid crystal materials," *Optik*, artículo en prensa (2008).
- [92] L.Solymar, "The Physics and Applications of Photorefractive Materials," *Department of Engineering Science, University of Oxford*.
- [93] Robert K. Erf, "Speckle Metrology," *United Technologies Research Center East Hartford, Connecticut, Academic Press, 1978*.
- [94] Baquedano Martínez.Jesús, "Espectroscopia de centros Fotorrefractivos en Niobato de Litio, Silicato y Germanato de Bismuto," *Departamento de Física Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid*.
- [95] Rueda Parada. Jorge E, *Crístales fotorrefractivos: optimización teórica de la birrefringencia inducida en función del tallado; pseudocoloreado y determinación del coeficiente electro-óptico r_{41} del germanato de bismuto*, "Bucaramanga, 1996, 64 p. Tesis de maestría (Magíster en Física), Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias, Escuela de Física.
- [96] Rueda Parada. Jorge E, *Crístales fotorrefractivos en la correlación óptica, implementación y caracterización*, "Bucaramanga, 2001, 114 p. Tesis de Doctorado (Doctorado en Ciencias Naturales - Física), Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias, Escuela de Física.