

UN NUEVO ENFOQUE PARA MODELAR REGIONES POROSAS SOBRE AUTÓMATAS DE LATTICE BOLTZMANN

G. Boroni^{a,b,e}, J. Dottori^{a,b,e}, D. Dalponte^{a,c,e}, N. Silin^{b,f}, J. Madrigal Argáez^d and A. Clause^{a,b,e}

^aUniversidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires – UNCPBA, Pinto 399 Tandil, Argentina, <http://www.unicen.edu.ar>

^bConsejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas - CONICET, Av. Rivadavia 1917 Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, <http://www.conicet.gov.ar>

^cComisión de Investigaciones Científicas de la Pcia. De Buenos Aires - CICPBA, Calle 526 entre 10 y 11 La Plata, Argentina, <http://www.cic.gba.gov.ar>

^dInstituto Tecnológico Metropolitano - Institución Universitaria - Medellín, Colombia, <http://www.itm.edu.co>

^eInstituto Pladema, Paraje Arroyo Seco S/N Tandil, Argentina, <http://www.pladema.net>

^fInstituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, Av. Bustillo 9500 Bariloche, Argentina.
<http://www.ib.edu.ar>

Palabras claves: Lattice Boltzmann, Immersed Boundary, Medios porosos.

Resumen. En este artículo se presenta un nuevo enfoque para modelar regiones porosas sobre la base del método de lattice Boltzmann. Dicho enfoque propone distribuir puntos de referencia sobre la región porosa, donde cada punto de referencia actuará sobre el fluido aplicando una fuerza de resistencia, que responde a un modelo fluidodinámico sobre la zona de influencia. El modelo propuesto aún se encuentra en una etapa de desarrollo dada la complejidad que trae generalizar su aplicación para regiones de permeabilidad no-homogénea. Los resultados preliminares son muy prometedores, mostrando buena concordancia con resultados de trabajos previos para un régimen de flujo laminar estacionario.

1 INTRODUCCION

Desde hace varios años, una de las líneas de investigación en la cual se viene trabajando fuertemente está asociada al estudio de flujos con obstrucciones complejas, que combina un rango de problemas que van desde el flujo alrededor de obstrucciones, o escala microscópica, por ejemplo hojas de plantas, elementos estructurales, etc.; hasta el tamaño total de la zona de flujo de interés, o escala macroscópica.

Estas escalas suelen diferir en varios órdenes de magnitud. En este contexto es muy común utilizar modelos de obstrucción que promedian el comportamiento de la zona de interés (Martino et al. 2012; Finnigan, 2000; Ghisalberti, 2009). En general este tipo de problemas puede caracterizarse por tres tipos: zonas libres, zonas de obstrucciones penetrables y zonas de obstrucciones impermeables (en forma de fronteras u objetos inmersos). Esta conjunción hace que se tengan fuertes inestabilidades en los límites definidos por los tipos de zonas.

Tomando como base la simulación de flujos de fluidos utilizando el método de Lattice Boltzmann (LBM) (Chen and Doolen, 1998), en la literatura se puede encontrar distintas formas de modelar obstrucciones rígidas y flexibles (Fadlun et al. 2000; Ge and Sotiropoulos, 2007; Gilmanov and Sotiropoulos, 2005; Johansen and Colella, 1998; Mittal and Iaccarino, 2005; Peskin, 1977; Udaykumar et al. 2001). El último aporte más importantes fue realizado por Cheng and Zhang (2010), que utiliza el método Immersed Bounday (IB) (Peskin, 2002) para calcular las fuerzas generadas por las distorsiones de la frontera, y posteriormente ser transferida al fluido.

No obstante para el modelado de medios porosos sobre LBM no ha habido grandes avances, y esto nos ha motivado a construir un método que permita modelar y simular porosidad, interactuando con el esquema LBM-IB.

A partir de los resultados obtenidos sobre LBM-IB, surgieron dos nuevas propuestas tendientes a generalizar el manejo de obstrucciones con porosidad y el acoplamiento fluido-estructura. Una de ellas es incorporar en IB un término de velocidad slip de porosidad asociado a la ley de Darcy (White, 2003); y la segunda propuesta es definir una región de referencia de puntos para representar la obstrucción (similar a IB), donde no hay segmentos que unan los puntos, y la fuerza de reacción de la obstrucción producto del movimiento del fluido se aplica sobre la región adyacente.

Aunque sobre la primera propuesta se tienen algunos resultados que intuitivamente sugieren ser alentadores, en la segunda propuesta es donde se han obtenido aportes más significativos, y en este artículo se muestran los detalles del modelo desarrollado y el grado de avance actual de dicha propuesta.

La conjunción de LBM-IB y medios porosos abre un espacio importante para futuras investigaciones, que conjuguen diferentes áreas de trabajo como pueden ser estudios de modelado dinámico del movimiento de cuerpos dentro de fluidos, estudio de propagación de esfuerzos mecánicos en flujo de fluidos, modelado de flujo de partículas, modelos de flujo sanguíneo, entre otros temas.

En particular, en este artículo se presentan resultados en la simulación de aneurismas cerebrales y obstrucciones tipo *stent* sobre canales ideales, y un análisis de inestabilidades en flujos laminares en canales parcialmente obstruidos con regiones porosas (Figuras 1 y 2).

Aunque en ambos casos de aplicación los resultados obtenidos son muy buenos, sólo en la segunda línea pudieron ser validados con estudios experimentales de laboratorio (Silin et al. 2013).

El presente artículo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 se describe brevemente el esquema de LBM; en la sección 3 se realiza una introducción al método IB; en

la sección 4 se describe el método desarrollado para modelar medios porosos; en la sección 5 se exponen los resultados obtenidos para los casos de aplicación mencionados; y por último, en la sección 6 se presentan las conclusiones, el estado de avance actual, y los futuros trabajos.



Figura 1. Stent sobre una aneurisma cerebral lateral.

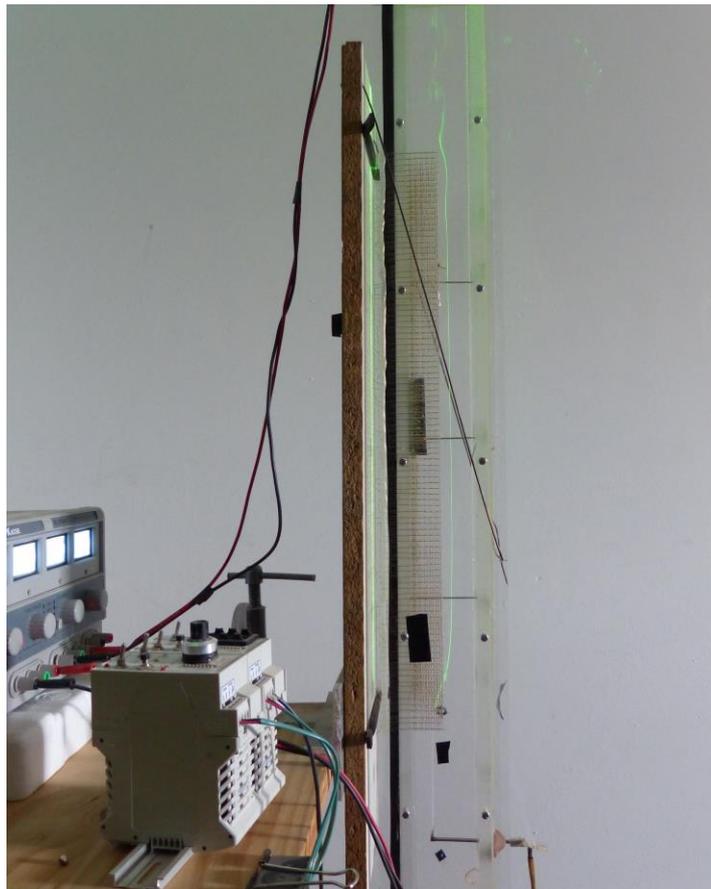


Figura 2. Flujo laminar en un canal con obstrucciones de alambres.

2 LA ECUACIÓN DE BALANCE DE LATTICE BOLTZMANN

LBM es esencialmente un autómata celular que opera en una grilla espacial regular con actualización de estados en tiempos discretos. El estado de cada celda de la grilla $x \in \mathfrak{R}^d$ en el tiempo t está definido por funciones escalares $f_i(x, t)$ que representan la función de distribución de partículas que se mueven con velocidad e_i . El conjunto de velocidades está definido por la discretización de la ecuación de Boltzmann en el espacio de las fases. De esta manera, cada esquema LBM se clasifica con el código $DdQq$, donde d es la dimensión espacial ($d = 1, 2$ ó 3) y q es el número de velocidades permitidas (Figura 3).

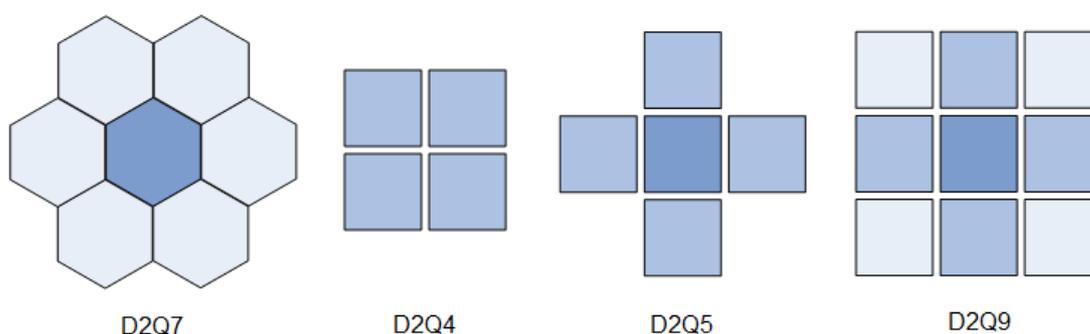


Figura 3. Esquemas típicos de LBM.

En el presente trabajo se utilizaron grillas cuadradas 2D con vecindarios de Moore, es decir, con conexiones verticales, horizontales y diagonales: D2Q9. La ecuación fundamental de LBM gobierna la variación del estado de las celdas de acuerdo a

$$f_i(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{(eq)}(x, t)] + \Delta t F_i(x, t), \quad (1)$$

donde τ es un parámetro de relajación que servirá para controlar la viscosidad del fluido, y $F(x, t)$ es el término asociado a las fuerzas externas que se aplican en el fluido. La función $f_i^{(eq)}(x, t)$ se llama distribución de equilibrio, y se construye a partir de la densidad y la velocidad macroscópica definidas por

$$\rho(x, t) = \sum_i f_i(x, t), \quad (2)$$

$$u(x, t) = \frac{\sum_i e_i f_i(x, t)}{\rho(x, t)}, \quad (3)$$

Estas variables macroscópicas son los observables del sistema.

La distribución de equilibrio $f_i^{(eq)}(x, t)$ es clave para que la ecuación de LBM simule las ecuaciones de un fluido. En general se construye como una función $f_i^{(eq)}(\rho, u)$. El esquema

BGK (Bhatnagar et al. 1954) propone el siguiente polinomio de segundo orden en u/c_s

$$f_i^{(eq)} = w_i \rho \left[1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_i \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u \cdot u}{2c_s^2} \right], \quad (7)$$

donde los coeficientes w_i dependen del tipo y dimensión de la grilla. Para el esquema D2Q9 se tiene (Geier, 2006)

$$w_0 = \frac{4}{9}; w_i = \frac{1}{9}, i = 1:4; w_i = \frac{1}{36}, i = 5:8, \quad (8)$$

y $c_s = \frac{e}{\sqrt{3}}$ es una pseudo-velocidad del sonido que relaciona la presión con la densidad de acuerdo a (Succi, 2001):

$$p = c_s^2 \rho. \quad (9)$$

La viscosidad del fluido queda determinada por el parámetro de relajación de acuerdo a

$$\mu = c_s^2 (\tau - 0.5) \Delta t. \quad (10)$$

3 EL MÉTODO IMMERSSED BOUNDARY

En general, las condiciones de contorno en LBM se introducen a nivel de la población, por ejemplo, las $f_i(x, t)$ son calculadas localmente luego de fijar los valores de los momentos. Las condiciones típicas de este tipo son de rebote o condiciones de contorno regularizados (Ziegler, 1993).

Otra posibilidad es utilizar el término de fuerza para emular condiciones de contorno. Esto se puede utilizar para simular objetos deformables o rígidos inmersos en el flujo. Teniendo en cuenta que estas fuerzas pueden generarse de la interacción fluido-estructura se suele separar el término de fuerza en dos partes; por una lado las contribuciones físicas, como por ejemplo la gravedad; y por otro lado el campo de fuerza generado por las condiciones de contorno (Cheng y Zhang, 2010). En particular, el método de fronteras inmersas (IB – Immersed Boundary) fue introducido por Peskin (1977) en simulaciones de problemas de fluidos cardiovasculares.

Cuando se aplica IB sobre un fluido se tienen dos sistemas de coordenadas: la red Euleriana para el fluido, y la malla Lagrangiana asociada a los puntos de frontera (ver Figura 4). La información entre ambos sistemas de coordenadas es comunicada por interpolaciones. En este sentido el desplazamiento del fluido es afectado por los términos de fuerza, y se comporta como si hubiera un límite. Las ecuaciones de IB se dan en Peskin (2002).

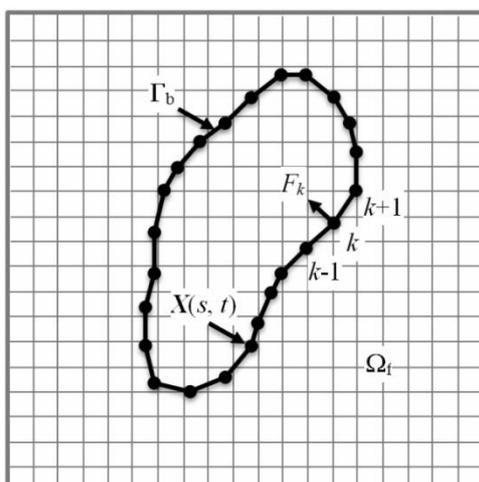


Figura 4. Immerse Boundary en un lattice 2D.

Los puntos de la frontera en el dominio Γ_b están representados por funciones $X(s, t)$ (con longitud de arco s), que devuelven las posiciones de los nodos x_k . La influencia de la frontera alrededor de x_k está representada por la densidad de fuerza F_k , la cual es transferida al dominio del fluido Ω_f a través del término de fuerza $F(x, t)$ de la Eq. (1).

En este trabajo la densidad de fuerza F_k está definida por la configuración de la frontera, considerando las fuerzas de flexión y tensión

$$F_k = k_c \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} - k_f (X - x_z), \quad (11)$$

donde x_z es la posición de referencia del punto; k_c y k_f son los coeficientes de flexión y tensión respectivamente. La discretización de la Eq. (11) puede ser expresada por

$$F_k = k_c \frac{(x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}))}{\Delta s^2} - k_f (x_k - x_z). \quad (12)$$

Luego, el acoplamiento LBM-IB está expresado por

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_x u(x) \delta_h(x_k - x) \Delta x, \quad (13)$$

$$F_{IB}(x) = \sum_{x_k} F_k \delta_h(x_k - x) \Delta s_k, \quad (14)$$

donde $h = \Delta x$ es el espacio nodal, y Δs_k es la longitud del segmento de x_k , y F_{IB} es el término de fuerza externa que se aplica al fluido. La función delta δ_h es una aproximación de la función de distribución Dirac dada por

$$\delta_h(x) = 1/h^d \prod_{i=1}^d \phi(x_i/h), \quad (15)$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{(1 + \cos(\pi|r|/2))}{4} & |r| \leq 2 \\ 0 & |r| > 2 \end{cases}. \quad (16)$$

En la ecuación Eq. (13) la velocidad de la frontera se calcula a partir de la velocidad del fluido. En la ecuación Eq. (14), las fuerzas que actúan sobre la frontera también actúan sobre el fluido (acción-reacción), lo cual asegura la conservación de momento. Detalles del algoritmo numérico y de implementación del modelo acoplado IB-LBM puede encontrarse en Boroni et al. (2012).

4 MODELADO DE MEDIOS POROSOS

Como ya se mencionó, no existe un número significativo de trabajos publicados en la literatura sobre problemas de fluidos en medios porosos utilizando LBM. En este sentido, la ventaja de LBM es que tiene gran flexibilidad para introducir interacciones a nivel local, ya sea modificando las reglas de actualización de las poblaciones o mediante el término de fuerza externa. De la primera opción se pueden obtener buenos resultados utilizando un modelo de *bounce-back* (Bhatnagar et al. 1954) parcial, que introduce una pseudo-condición de contorno en las celdas de la zona porosa. Sin embargo, cuando se desea modelar regiones complejas, es necesario trabajar con grillas de tamaños significativos para lograr la representación del objeto a partir de una configuración de celdas. Los mejores resultados se lograron con un modelo de fuerzas distribuidas alrededor de puntos de referencia, el cual se describe a continuación.

4.1 Modelo de fuerzas distribuidas

Una propuesta alternativa para modelar un flujo en medios porosos en LBM es por medio del término fuerza externa. En efecto, un medio poroso se caracteriza por ofrecer una resistencia al movimiento por unidad de volumen que satisface la ley de Darcy:

$$F_D = -\frac{\mu}{\kappa} u, \quad (17)$$

donde μ es la viscosidad dinámica y κ es la permeabilidad. Este modelo es atractivo por lo simple que resulta su implementación considerando la Eq. (1); no obstante esto las primeras pruebas numéricas realizadas mostraban diferencias significativas con los experimentos, especialmente en los rangos inestables. Luego de analizar los resultados se concluyó que la principal razón de las diferencias estaba asociada a la distribución de las fuerzas sobre las celdas adyacentes.

En base a estas observaciones, se propuso un modelo de fuerzas distribuidas alrededor de puntos de referencia. La zona porosa se define en este modelo con un conjunto de puntos de referencia x_p , cada uno de los cuales aporta un término de fuerza F_p a su entorno cercano, dado por

$$F_p(x) = -\frac{\mu}{\kappa} \delta_h(x_p - x) u(x), \quad (18)$$

Es decir, la fuerza se distribuye entre las celdas que se encuentran a menos de r de distancia del punto de referencia x_p .

5 ESTUDIOS NUMERICOS

5.1 Simulación de aneurismas cerebrales y obstrucciones tipo *stent* sobre canales ideales

En este caso se consideró una geometría bidimensional convexa, cuyas paredes están modeladas con IB, y una obstrucción sobre la zona central (ver Figura 5). La configuración se

da en unidades de celdas: grilla de 120×100 , $u_{in} = 0.02$, $\rho = 1$, $\mu = 0.5/3.0$, flujo libre a la salida, las paredes están modeladas con IB con una separación $\Delta s_k = 0.3$, y en la región de porosidad los puntos de referencia están ubicados a una distancia de un punto por celda ($\Delta s_p = 1$). La región de influencia se corresponde con la Eq. (16) y es de distancia 2.

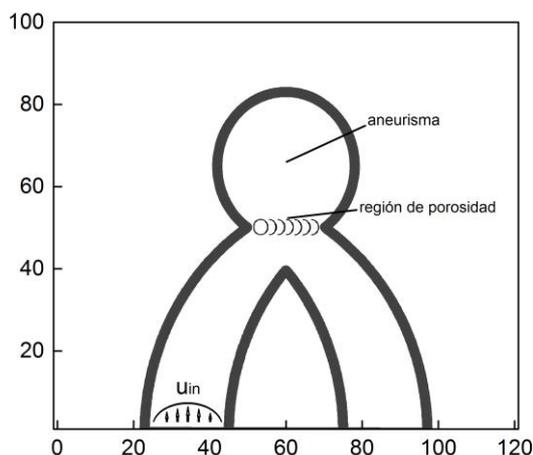


Figura 5: Configuración de LBM-IB- región de porosidad.

En los estudios realizados se analizó el bloqueo parcial para distintos valores de permeabilidad, considerando la Eq. (17). La dinámica del flujo simulado en la región del aneurisma es de carácter cualitativo. El flujo de sangre no necesariamente es newtoniano bajo determinadas condiciones de velocidad, debido a los efectos de la coagulación. Actualmente se está trabajando en modelar este comportamiento (Morales et al. 2013).

La Figura 6 se corresponde con el caso de una aneurisma sin presencia de una región de porosidad (simulando que no posee *stent*). El perfil de velocidad (Eq. (3)) es similar al que se puede encontrar en una aneurisma cerebral lateral (AANS).

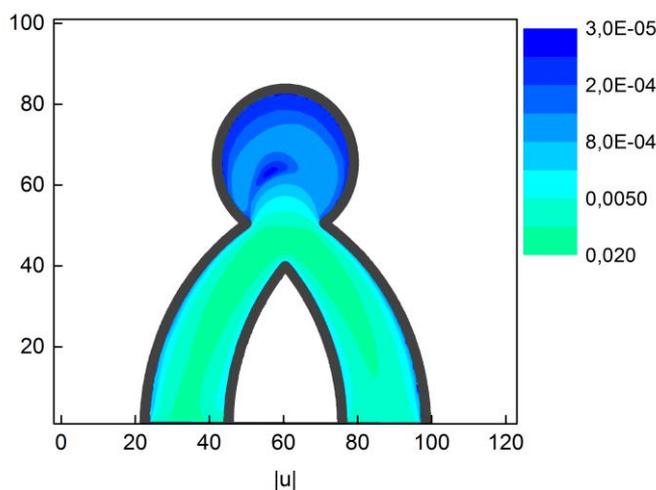


Figura 6: Simulación de una aneurisma lateral sin *stent* (sin región de porosidad).

En la Figura 7 se puede ver una obstrucción en la zona central (color anaranjado) que deja pasar levemente un flujo sobre la aneurisma. El perfil de velocidad indica que dicha obstrucción actúa como un filtro que distribuye casi proporcionalmente el flujo de ingreso en la malformación.

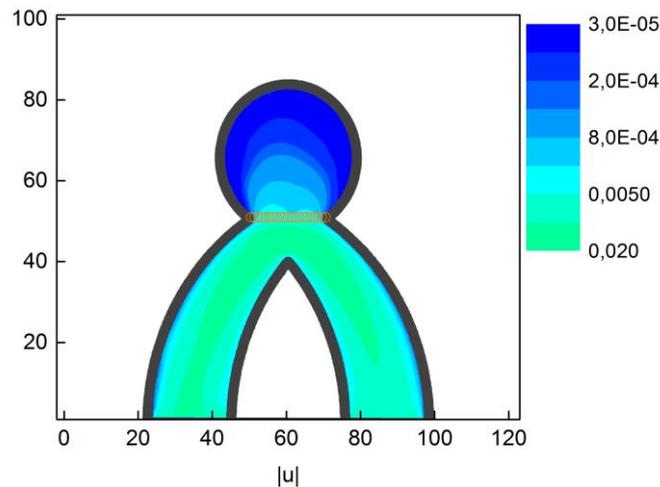


Figure 7: Simulación de una aneurisma lateral con *stent*, considerando un valor de permeabilidad $k = 0.053$.

Por último, en la Figura 8 se presenta el caso de una obstrucción que produce un bloqueo casi total de flujo de ingreso en la malformación, que tiene cierta correspondencia con lo que sucede en la realidad.

Como ya fue mencionado, no se han realizado aún testeos y validaciones con datos experimentales o analíticos. Para ello será necesario establecer una interfaz que permita la representación en 2D de una imagen real de una aneurisma de test, definir los parámetros de velocidad in-out, viscosidad, densidad, establecer espacialmente la región de porosidad con valores de permeabilidad según la característica del *stent* a modelar, y por último configurar la elasticidad de la arteria y la malformación. El desarrollo de esta interfaz será parte del trabajo futuro.

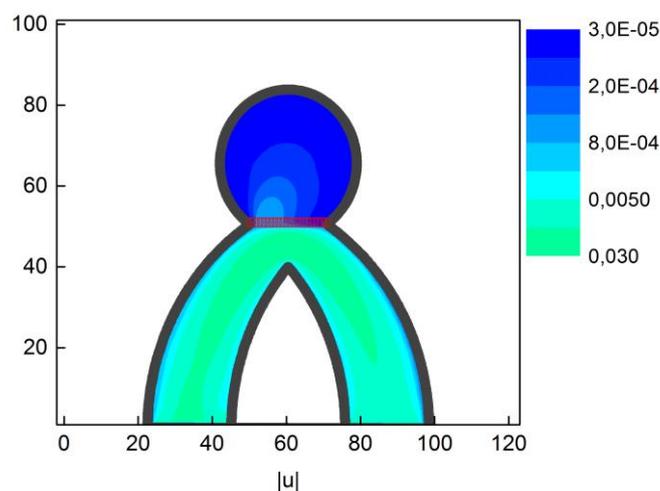


Figure 8: Simulación de una aneurisma lateral con *stent*, considerando un valor de permeabilidad $k = 0.53$.

5.2 Flujos laminares en canales parcialmente obstruidos

Las pruebas se realizaron sobre una geometría bidimensional limitada por paredes paralelas y parcialmente obstruidas por una región porosa, como se muestra en la Figura 2. Los detalles de la configuración de LBM-región de porosidad en unidades de celdas son: grilla de 1220×58 , $u_{in} = 0.01$, $\rho = 0.05$, $\mu = 0.02$, y presión a la salida $p = 0.049/3$. En las paredes laterales se aplica no-slip (Bhatnagar et al. 1954), y cada punto de la región de porosidad se corresponde con las posición de los alambres ($x_{min}=220.0$, $y_{min}=0.5$, $x_{max}=720.0$, $y_{max}=29.0$, $dx=5.0$, y $dy=2.5$).

El dispositivo experimental consta de un canal de sección rectangular parcialmente bloqueado por un arreglo de alambres perpendiculares al plano de flujo. Las mediciones se realizaron mediante anemometría térmica. El método experimental se detalla en Silin et al. 2013.

En la Figura 2 se visualiza una línea de humo sobre la sección experimental donde puede apreciarse una ondulación a medida que se avanza a lo largo de la sección porosa. No se observan otro tipo de inestabilidades, tampoco una deformación significativa de la línea de humo en dirección lateral. Las inestabilidades observadas se estudiaron en detalle en Silin et al. (2013), de donde se tomaron los resultados experimentales utilizados para la validación numérica.

En las Figuras 9 y 10 se muestran los perfiles de velocidad media y desvío estándar de los resultados analíticos, experimentales y numéricos. Se eligió un caudal de entrada y una posición longitudinal que presentara inestabilidades. Si bien se aprecian algunas ondulaciones en los contornos de velocidad, los resultados son básicamente estacionarios. Se puede ver un buen ajuste en el perfil de velocidad media, que muestra una muy buena concordancia a lo largo de la dirección transversal, como así también las magnitudes promediadas obtenidas. El desvío estándar obtenido acompaña de buena forma los resultados analíticos y experimentales. Si bien presenta algunas diferencias respecto a los valores absolutos, se replica la forma de las curvas, y se logra reproducir el pico secundario de inestabilidades en torno a de la posición transversal $y=50$.

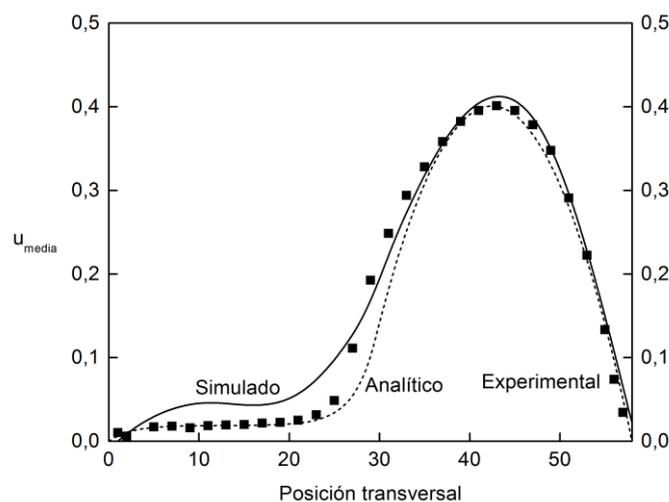


Figure 9: Comparación de los resultados numéricos, analíticos y experimentales para el perfil de velocidad media.

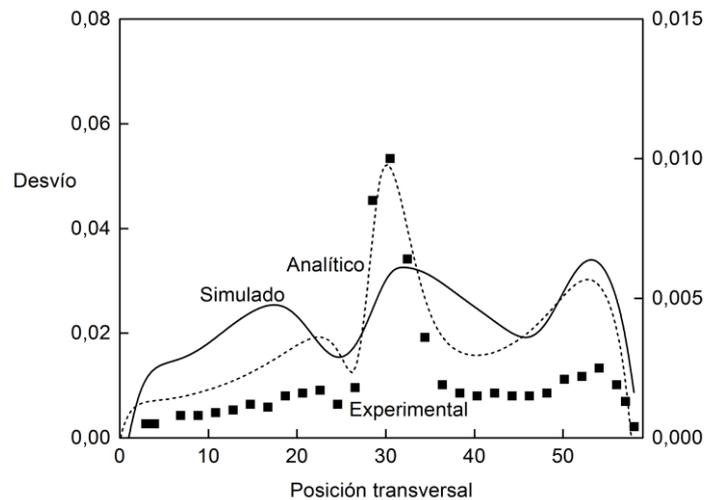


Figure 10: Comparación de los resultados numéricos, analíticos y experimentales para el desvío estándar de la velocidad media.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se muestra el estado de avance de un método simple para incorporar el efecto de regiones de porosidad en la simulación de fluidos con LBM. Este método es fácil de implementar, y prácticamente no requiere costo adicional ya que opera sobre cantidades previamente calculadas.

Para determinar la utilidad práctica del nuevo método se hicieron dos casos de estudio, que pueden ser generalizados en una amplia gama de problemas con permeabilidades. Para el caso de estudio de flujos laminares en canales parcialmente obstruidos se pudo validar el método contra soluciones analíticas y experimentales, lo cual muestra muy buen acuerdo entre los resultados.

Teniendo en cuenta que hay una correlación aceptable entre los resultados obtenidos y las soluciones analíticas y/o experimentales, se definieron las siguientes líneas de trabajo:

- Validar el modelo 2D para el caso de aneurisma, e incluir algún método para simular coagulación (como por ejemplo, variar la viscosidad a nivel de celda).
- Analizar la configuración espacial (manual y automática) de la región de porosidad.
- Definir una interfaz que permita modelar LBM-IB-Región de porosidad a partir de imágenes reales.
- Generar un modelo 3D más realista, con capacidad de ejecutar sobre placas gráficas. En esta línea se han realizado varios aportes en 2D (incluso han sido publicados), y la naturaleza del problema y de las ecuaciones permiten que el modelo pueda ser generalizado fácilmente.

REFERENCIAS

- AANS, American Association of Neurological Surgeons, <http://www.aans.org/>.
 Bhatnagar P., Gross E., and Krook M., A model for collisional processes in gases I: small amplitude processes in charged and neutral one-component system, *Phys. Rev.* 94, 1954.
 Boroni G., Dottori J., Dalponte D., Rinaldi P. and Clausse A., An improved Immersed-

- Boundary algorithm for fluid-solid interaction in Lattice-Boltzmann simulations, *Latin American Applied Research* 43, 181-187, 2012.
- Chen, S. and Doolen G. D., Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows. *Annual Reviews Fluid Mechanics* 30, 329-364, 1998.
- Fadlun E. A., Verzicco R., Orlandi P., Mohd-Yusof J., Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations, *J. Comput. Phys.* 161, 35–60, 2000.
- Finnigan J., Turbulence in Plant Canopies, *Annual Reviews Fluid Mechanics* 32, 519–571, 2000.
- Ge L., Sotiropoulos F., A numerical method for solving the 3D unsteady incompressible Navier–Stokes equations in curvilinear domains with complex immersed boundaries, *J. Comput. Phys.* 225, 1782–1809, 2007.
- Geier M., AB initio derivation of the cascaded Lattice Boltzmann automaton, *University of Freiburg – IMTEK*, 2006.
- Ghisalberti M., Transport in porous media, *Fluid Mechanics* 641, 51–61, 2009.
- Gilmanov A., Sotiropoulos F., A hybrid Cartesian/immersed boundary method for simulating flows with 3D, geometrically complex, moving bodies, *J. Comput. Phys.* 207, 457–492, 2005.
- Johansen H., Colella P., A Cartesian grid embedded boundary method for Poisson’s equation on irregular domains, *J. Comput. Phys.* 147 60–85, 1998.
- Martino R., Paterson A. and Piva M. Double-average mean flow and local turbulence intensity profiles from PIV measurements for an open channel flow with rigid vegetation, *Fluid Mechanics* 12, 45-62, 2012.
- Mittal R., Iaccarino G., Immersed boundary methods, *Annual Reviews Fluid Mechanics*. 37, 239–261, 2005.
- Morales H, Larrabide I, Geers A., Aguilar M., and Frangi A., Newtonian and non-Newtonian blood flow in coiled cerebral aneurysms, *J. of Biomechanics*, 46, 2158–2164, 2013.
- Peskin C. S., Numerical analysis of blood flow in the heart, *J. Comput. Phys.* 25, 220–252, 1977.
- Peskin C. S. The immersed boundary method. *Acta Numer* 11, 479–517, 2002.
- Silin N., Boroni G., Dalponte D., Dottori J., y Clausse A., Aplicación del método de Lattice Boltzmann a la simulación de obstrucciones complejas fácilmente penetrables, *Anales AFA* 23, 39-42, 2013.
- Succi S., Filippova O., Smith G., and Kaxiras E., Applying the Lattice Boltzmann Equation to Multiscale Fluid Problems, *Computing in Science and Engineering*, 2001.
- Udaykumar H. S., Mittal R., Rampunggoon P., Khanna A., A sharp interface Cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries, *J. Comput. Phys.* 174, 345–380, 2001.
- White F., *Fluid Mechanics*, McGraw Hill, 2003.
- Ziegler D. P., Boundary conditions for lattice Boltzmann simulations, *J. Stat. Phys*, 71, 1171-1177, 1993.