



provincia de buenos aires
comisión de
investigaciones científicas
Calle 526 e/ 10 y 11 1900 La Plata
Tel. Fax: (0221) 421 7374 / 6205 int.143
D.E.: perapoyo@cic.gba.gov.ar

PERSONAL DE APOYO A LA
INVESTIGACION Y DESARROLLO

INFORME PERIODO Agosto 2011 - Agosto 2012

1. APELLIDO: Dello Russo

Nombre: Anahí

Título: Licenciada en Física

Dirección electrónica: anahi@mate.unlp.edu.ar

2. OTROS DATOS.

INGRESO. Categoría: Asistente

Mes: Octubre

Año: 1989

ACTUAL. Categoría: Principal

Mes: Agosto

Año: 1999

3. PROYECTOS DE INVESTIGACION EN LOS CUALES COLABORA.

Título: Análisis Aplicado y Física Matemática

Director: Solomin, Jorge Eduardo

Código: UNLP 11/X500

4. DIRECTOR.

Apellido y Nombres: Durán, Ricardo Guillermo

Cargo/ Institución: Profesor Titular con Dedicación Exclusiva del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA

Dirección.

Dirección electrónica: rduran@dm.uba.ar

5. LUGAR DE TRABAJO.

Institución: Departamento de Matemática

Dependencia: Facultad de Ciencias Exactas, UNLP

Dirección. Calle 50 entre calles 1 y 115

Ciudad: La Plata

Código Postal: 1900

Prov.: Buenos Aires

Tel.: 0221-422-9850

6. INSTITUCION DONDE DESARROLLA LAS TAREAS DOCENTES.

Institución: Departamento de Matemática

Dependencia: Facultad de Ciencias Exactas, UNLP

Dirección. Calle 50 entre calles 1 y 115

Ciudad: La Plata

Código Postal: 1900

Prov.: Buenos Aires

Tel.: 0221-422-9850

Cargo que ocupa: Jefe de Trabajos Prácticos con Dedicación exclusiva

7 Exposición sintética de la labor desarrollada en el período

Durante este período laboral se trabajó en los siguientes problemas:

- (1) Determinación de los modos de vibración de un sólido elástico.

Durante el período laboral anterior se estudió el problema de autovalores derivado del *principio variacional de Hellinger-Reissner* para la elasticidad lineal y se analizó la aproximación de sus soluciones utilizando el método de elementos finitos no conforme de *Arnold-Winther* [4] que, en particular, preserva la simetría del tensor de esfuerzos. También se analizaron los métodos propuestos por [9] and [13]. Durante este año se completaron los cálculos correspondientes para determinar la convergencia y se obtuvieron estimaciones de error con orden óptimo para los autovectores y autovalores. Los resultados obtenidos permitieron la redacción del paper *Eigenvalue approximation by mixed nonconforming finite element methods: The determination of the vibrational modes of a linear elastic solid* que actualmente se encuentra en una etapa de revisión. Una versión preliminar de este trabajo se presenta adjunta a este informe.

- (2) Extensión de la teoría espectral a métodos no conformes.

El análisis espectral presentado en [1], [2] y [10] está basado en la teoría abstracta desarrollada por *Descloux-Nassif-Rappaz* [11,12] para estudiar las discretizaciones conformes de operadores acotados generales definidos en espacios de Banach. Una característica interesante de esta teoría es que puede ser adaptada para tratar con aproximaciones no conformes.

La teoría [1] es una adaptación de [11,12] que permite el análisis de las aproximaciones del espectro de un operador acotado obtenidas usando métodos discontinuos. En particular, se consideró que el problema de autovalores está planteado en un dominio poligonal.

La teoría [2] es una adaptación de [11,12] que permite el análisis de las aproximaciones externas del espectro de un operador acotado. Recordemos que un dominio discreto Ω_h aproxima a Ω externamente si $\Omega_h \not\subset \Omega$. En esta situación, a fin de estudiar la convergencia de las soluciones discretas, necesitamos definir extensiones suaves de Ω a Ω_h para las funciones pertenecientes a los espacios continuos y extensiones conformes de Ω_h a Ω para las funciones en los espacios discretos. En particular, se consideró la extensión trivial de estas funciones, restringiendo la aplicabilidad de la teoría a problemas con soluciones que tienden a cero sobre el borde del dominio, como las autofunciones del problema de Dirichlet.

Las diferencias entre las teorías descritas arriba pueden resumirse mediante la siguiente tabla:

[11, 12]	$\Omega_h = \Omega$	$V_h(\Omega_h) \subset V(\Omega)$
[1]	$\Omega_h = \Omega$	$V_h(\Omega_h) \not\subset V(\Omega)$
[2]	$\Omega_h \not\subset \Omega$	$V_h(\Omega_h) \subset V(\Omega_h) \not\subset V(\Omega)$

$V(\Omega)$ y $V_h(\Omega_h)$ indican aquí los espacios de funciones continuos y discretos, respectivamente.

Finalmente, la teoría [10] es una adaptación de [2] que permite analizar las aproximaciones de un problema de autovalores planteado en forma mixta, definido sobre dominios curvos no convexos y sujeto a condiciones de borde generales. En particular, se consideró que los espacios discretos satisfacen la condición $V_h(\Omega_h) \subset V(\Omega_h)$.

Durante este período laboral se desarrolló un marco teórico abstracto que permite la unifi-

cación de todas estas teorías y su extensión a situaciones más generales. Más precisamente, la nueva teoría permite estudiar las aproximaciones de un problema de autovalores que puede estar formulado *en forma primal o mixta, definido sobre dominios poligonales o curvos, sujeto a condiciones de borde generales y discretizado por métodos discontinuos*.

Como aplicación de esta teoría se estudiarán en un futuro las aproximaciones por medio de *métodos discontinuos de Galerkin* [3] de los siguientes problemas espectrales:

- modos de vibración acústicos en dominios curvos
- modos vibracionales de un sólido elástico de forma arbitraria

(3) Determinación de los modos propios de las ecuaciones de Stokes con condiciones de borde *slip*.

El sistema de ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de borde *slip* es el modelo físico adecuado para la simulación de flujos que presentan superficies libres, flujos a través de paredes químicamente reactivas y flujos viscosos incompresibles con números de Mach y de Reynolds altos. En este estudio consideraremos el modelo linealizado correspondiente conocido como ecuaciones de Stokes. El problema de autovalores asociado es el siguiente:

Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $(\mathbf{u}, p) \neq (\mathbf{0}, 0)$, tal que:

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \lambda \mathbf{u}, \quad \text{en } \Omega \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{en } \Omega \tag{2}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \tag{3}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Upsilon}(\nu \mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \tag{4}$$

donde \mathbf{u} indica el campo de velocidades, p la presión, $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{v}, q)$ representa al tensor de esfuerzos, ν es la viscosidad y \mathbf{n}, \mathbf{t} son los vectores unitarios en la dirección normal y tangencial al borde $\partial\Omega$, respectivamente.

A diferencia de las ecuaciones de Stokes con condiciones de borde *no slip* (tipo Dirichlet), las soluciones del problema (1-4) no son estables con respecto a perturbaciones del borde de Ω . Más aún, puede demostrarse que el problema no puede ser aproximado considerando la solución del mismo sobre una aproximación poligonal Ω_h del dominio original. Este fenómeno se conoce como *Paradoja de Babuška* [5].

A fin de evitar esta dificultad, se consideró una formulación variacional del problema que incorpora la condición de borde (3) débilmente mediante un *multiplicador de Lagrange* [6]. Con esta formulación variacional se estudió la aproximación del problema espectral considerando una sucesión de dominios poligonales Ω_h , $\lim_{h \rightarrow 0} \Omega_h = \Omega$, utilizando la familia de elementos finitos mixtos de *Taylor-Hood* [14] y aplicando la teoría espectral desarrollada en [10].

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- agregando funciones *burbuja*s al espacio utilizado para discretizar a las velocidades, se pudo demostrar que los elementos finitos de *Taylor-Hood* satisfacen las condiciones de estabilidad de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* [8] que permiten establecer la existencia, unicidad y la dependencia continua de la solución del problema con los datos. Este procedimiento fue propuesto por *Verfürth* [15] para problemas fuente.
- aplicando la teoría de aproximación [10], se pudo demostrar que el método numérico converge correctamente y establecer estimaciones de error óptimas para los autovectores (\mathbf{u}, p) en la norma producto $H^1(\hat{\Omega}) \times L^2(\hat{\Omega})$, $\hat{\Omega} = \Omega \cup \Omega_h$, y un doble orden de convergencia para los correspondientes autovalores.
- se pudo interpretar al *multiplicador de Lagrange* utilizado en la formulación variacional como la componente $\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Upsilon}(\nu \mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}$ del tensor de esfuerzos sobre el borde $\partial\Omega$ y demostrar que el

método numérico propuesto da aproximaciones para este parámetro físico que convergen en la norma $L^2(\partial\Omega)$ con orden óptimo.

References

- [1] A. Alonso and A. Dello Russo, Spectral approximation of variationally posed eigenvalue problems by nonconforming methods, *J. Comput. Appl. Math.*, **223** (2009) 177-197.
- [2] A. Alonso and A. Dello Russo, Spectral approximation of variationally formulated eigenvalue problems on curved domains, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **35** (2009) 69-87.
- [3] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and D. Marini, Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems in Discontinuous Galerkin Methods, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* **11**, B. Cockburn, G.E. Karniadakis and C.W. Shu eds., Springer, 2000.
- [4] D.N. Arnold and R. Winther, Nonconforming mixed finite elements for elasticity, *Math. Models Methods Appl. Sci*, **13** (2003) 295-307.
- [5] I. Babuška, The theory of small changes in the domain of existence in the theory of partial differential equations and its applications, in *Differential Equations and their Applications*, Academic Press, New York, 1963.
- [6] I. Babuška, The finite element method with Lagrange multipliers, *Numer. Math.*, **20** (1973) 179-192.
- [7] E. Bänsch and K. Deckelnick, Optimal error estimates for the Stokes and Navier-Stokes equations with slip boundary conditions, *Math. Model. Numer. Anal.*, **33** (1999) 923-938.
- [8] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [9] Z. Cai and X. Ye A mixed nonconforming finite element for linear elasticity, *Numer. Meth. for PDE's*, **21** (2005) 1043-1051.
- [10] A. Dello Russo and A. Alonso, Mixed finite element analysis of eigenvalue problems on curved domains, Preprint 2009, <http://www.mate.unlp.edu.ar/publicaciones.php>.
- [11] J. Descloux, N. Nassif and J. Rappaz, On spectral approximation. Part 1: The problem of convergence, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, **12** (1978) 97-112.
- [12] J. Descloux, N. Nassif and J. Rappaz, On spectral approximation. Part 2: Error estimates for the Galerkin methods, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, **12** (1978) 113-119.
- [13] K.Y. Kim, Analysis of some low-order nonconforming mixed finite elements for linear elasticity problem, *Numer. Meth. for PDE's*, **22** (2006) 638-660.
- [14] P. Hood and C. Taylor, Numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique, *Comput. Fluids*, **1** (1973) 1-28.
- [15] R. Verfürth, Finite element approximation of incompressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions, *Numer. Math.*, **50** (1987) 697-721.

8. OTRAS ACTIVIDADES.

8.1 PUBLICACIONES, COMUNICACIONES, ETC.

1. ***A posteriori error estimates for nonconforming approximations of Steklov eigenvalue problems***, A. Dello Russo and A. Alonso, Computers and Mathematics with Applications, vol. 62 pag. 4100-4117 (2011).

8.2 CURSOS DE PERFECCIONAMIENTO, VIAJES DE ESTUDIO, ETC.

No consigna.

8.3 ASISTENCIA A REUNIONES CIENTIFICAS/TECNOLOGICAS o EVENTOS SIMILARES.

No consigna.

9. TAREAS DOCENTES DESARROLLADAS EN EL PERIODO.

Jefe de Trabajos Prácticos de Matemáticas Especiales I, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, segundo cuatrimestre de 2011.

Jefe de Trabajos Prácticos de Análisis Matemático II, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, primer cuatrimestre de 2012.

10. OTROS ELEMENTOS DE JUICIO NO CONTEMPLADOS EN LOS TITULOS ANTERIORES.

Integrante de la Comisión de Grados Académicos del Departamento de Matemática hasta noviembre de 2011.

Integrante de la Comisión ad-hoc para Trabajos Experimentales de la Facultad de Ciencias Exactas desde junio de 2012.

Evaluador de un trabajo científico para la Journal of Computational and Applied Mathematics, febrero de 2012.