SISTEMA SIMÉTRICO (MKSQ) DE UNIDADES Y MEDIDAS ELECTROMAGNÉTICAS

por

ENRIQUE LOEDEL PALUMBO

RESUMEN

Se propone un sistema de unidades y medidas electromagnéticas cuyas características principales son:

1) Las unidades fundamentales son las mismas que las del sistema GIORGI (*m*, *kg*, *s*, *coulomb*);

2) El campo eléctrico E y el magnético H tienen idénticas dimensiones físicas interpretándose así a ambos como componentes de un único ente que es el hexavector del campo. De este modo el campo electromagnético puede ser descripto por un único tensor (160, 171; 166, 167, 174 y 175).

3) Las constantes ε y μ son números sin dimensiones e iguales a la unidad para el vacío.

4) En las fórmulas intervienen sólo dos constantes dimensionadas: k (48, 49) y c (50); 53 y 54; 57, 58, 59. Estas constantes se vinculan a ε_0 y μ_0 del sistema GIORGI racionalizado (G. R.) y a ε_0 y μ_0 del GIORGI no racionalizado (G. no R.) por las ecuaciones 224 y 225. Las ecuaciones 227 a 230 permiten pasar del sistema simétrico (S. S.) al G. R. y al G. no R.

5) En el sistema propuesto la *"racionalización"*, si así puede llamarse a una sustitución trivial (239): 231 y 240; es automática y se realiza sin cambio de unidades.

6) Se propone el nombre de *lorentz* para designar a la unidad de intensidad de campo de este sistema (64 y 65).

7) Se define el "flujo dinámico" ϕ por 110 para pasar de 109 a 111 y medir ϕ en *weber*. Lo mismo se logra si la reluctancia se define por 261.

8) Se hace una crítica a la llamada correspondencia de *Sommerfeld* y se muestra que no tiene sentido decir que E y B pertenecen al mismo hexavector y D y H a otro ($\oint$ 13).

SUMMARY

Symmetrical System (MKSQ) of Electromagnetic Unities and Measures

A system of electric unities and measures is proposed, whose principal characteristics are:

1. The fundamental unities are the same as those of GIORGI's system (m, kg, s, coulomb).

2. The electric field E and the magnetic fiel H have the same physic dimensions and they are both taken as components of a single entity which is the field hexavector. In this way the electromagnetic field can be described by a single tensor (160, 171, 166-167 and 174-175).

3. The constants ϵ and μ are dimensionless numbers and in vacuum they equal 1.

4. Only two dimensional constants appear in the formulae: k (48-49) and c (50, 53-54, 57-59). These constants are linked to ϵ_0 and μ_0 in GIORGI's rationalized system (G. R.) and to ϵ_0 and μ_0 in GIORGI's nonrationalized system (G. no R.) by equations 224 and 225. By means of equations 227-230 it is possible to pass from the symmetrical system (S. S.) to G. R. and G. no R.

5. In the proposed system the "rationalization", so to call a trivial substitution (239); (231 and 240), is automatic and achieved without a change of unities.

6. The word *lorentz* is proposed to name the intensity unity of the field in this system (64-65).

7. "Dynamic flux" ϕ is defined by 110 in order to pass from 109 to 111 and to mesure ϕ in *weber*. The same result ic obtained if the reluctance is defined by 261.

8. The so-called correspondence of SOMMERFELD is discussed and it is shown that it makes no sense to state that E and B belong to the same hexavector while D and H belong to another (§ 13).

SISTEMA SIMÉTRICO (MKSQ) DE UNIDADES Y MEDIDAS ELECTROMAGNÉTICAS

por

ENRIQUE LOEDEL PALUMBO

> *Nadie puede negar que las dimensiones de la intensidad del campo eléctrico son las de una fuerza sobre una carga y que las del desplazamiento eléctrico (D) son las de una carga sobre una superficie.*
> ARNOLD SOMMERFELD: (Phys. Zeits. XXXVI, 815.)

> *Discurrir acerca de las* verdaderas *dimensiones de las magnitudes físicas tiene tanto sentido como la cuestión referente al* verdadero *nombre de los objetos.*
> MAX PLANCK: Theorie der Elektrizität, pág. 14.

1. CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DEL SISTEMA PROPUESTO *. — Se propone un sistema de medidas electromagnéticas en el cual la mayoría de las unidades de las magnitudes electromagnéticas coinciden con las unidades llamadas prácticas (VOLT, AMPERE, OHM, etcétera). En este sistema se utilizan cuatro magnitudes y unidades fundamentales, tres mecánicas y una eléctrica, exactamente igual a lo que se hace en el

* Desde el año 1956 empleamos el sistema que aquí proponemos con nuestros alumnos de la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas y en setiembre de 1958 presentamos un resumen del mismo a la Asociación Física Argentina.

sistema GIORGI, pero se escriben las leyes fundamentales de modo que resulten con *las mismas dimensiones físicas la intensidad del campo eléctrico y del campo magnético*. Siempre nos pareció antieconómico —en el sentido de MACH— un sistema como el de GIORGI, en el cual se utilizan cuatro vectores, *los cuatro con dimensiones físicas diferentes*, para describir el campo, aún en el vacío. Desde el punto de vista de la teoría de la relatividad el campo electromagnético puede ser descripto por un único ente que es, precisamente, el llamado *hexavector* del campo. De las seis componentes de este hexavector tres son las componentes del vector eléctrico y las otras tres las del vector magnético. Por esta razón resulta deseable un sistema en el cual las intensidades de ambos campos (el eléctrico y el magnético) aparezcan con las mismas dimensiones físicas.

Para sintetizar, podríamos decir que el sistema simétrico que aquí proponemos, es algo así como el sistema de GAUSS trasladado a la escala del COULOMB y hecho tetradimensional en lugar de tridimensional. En él intervienen dos constantes: una constante k de proporcionalidad de la ley de COULOMB (la misma para electroestática que para magnetoestática) y la constante electrodinámica c, que resulta, a la postre, igual a la velocidad de propagación de la luz en el vacío.

En lo que sigue examinaremos con algún detalle las convenciones sobre las cuales se asienta cualquier sistema de unidades y medidas, con el objeto de poder apreciar luego las ventajas y desventajas de los sistemas en uso y del propuesto.

2. CONVENCIONES IMPLÍCITAS EN LOS SISTEMAS DE UNIDADES Y DE MEDIDAS. — Un sistema de unidades (o de medidas) no queda enteramente determinado con sólo dar las magnitudes fundamentales y sus unidades correspondientes. Es necesario, además, adoptar ciertas convenciones. Estas convenciones, cuando el uso las ha sancionado unánimemente, se presentan al espíritu de un modo tan natural, que no se advierte el carácter, hasta cierto punto arbitrario, de las mismas. Veamos algunos ejemplos:

a) *Magnitudes geométricas derivadas.* — Si se adopta como magnitud fundamental de las determinaciones geométricas la longitud, entonces, las expresiones que permiten calcular el área A de un cuadrado del lado l, o la superficie S de una esfera de radio r, o el volumen V de esta misma, son:

$$A = l^2 \; ; \; S = 4\pi r^2 \; ; \; V = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

¿Qué convenciones se han tenido que hacer para que las fórmulas precedentes sean válidas? Simplemente *se ha convenido* en adoptar como unidad de área, el área de un cuadrado cuyo lado tenga la unidad de longitud y, como unidad de volumen, el volumen de un cubo cuya arista sea también la unidad de longitud. Si la unidad de longitud adoptada fuera el metro, la unidad de área sería el área de un cuadrado de lado igual a 1 m de arista. Pero nada impide que se adopten otras unidades de área y de volumen *derivadas también del metro lineal.* Si se *conviniera* en adoptar como unidad de área, el área de una superficie esférica de radio unitario y como unidad de volumen, el volumen de esa misma esfera, la superficie A de un cuadrado de lado l estaría expresada así:

$$A = \frac{1}{4\pi} l^2 \; ;$$

en tanto que la superficie S y el volumen V de una esfera de radio r estarían dadas por las sencillas expresiones

$$S = r^2 \; ; \; V = r^3 \; ;$$

mientras que el volumen de un cubo habría que calcularlo así:

$$V = \frac{3}{4\pi} l^3 .$$

Si se adoptara, por definición, como unidad de área, el área de un triángulo equilátero de la unidad de longitud y como unidad de volumen, el volumen del tetraedro regular de arista unitaria, la superficie A de un cuadrado de lado l y el volumen V de un cubo de arista l se expresarían así:

$$A = \frac{4}{3}\sqrt{3}\, l^2 \; ; \quad V = 6\sqrt{2}\, l^3 .$$

Estos ejemplos prueban que las unidades derivadas de un sistema de medición no quedan determinadas con sólo dar las unidades fundamentales. Felizmente, en las medidas geométricas el acuerdo es unánime, por lo cual pasa inadvertido el carácter convencional de las unidades derivadas de área y volumen. Una *convención* puede ser más cómoda que otra, pero no más racional o más lógica. No obstante hay autores que defienden uno u otro sistema con argumentos que parecen apuntar a la propia naturaleza de la *"cosa en sí"* tiñéndose entonces el discurso con peligrosos matices metafísicos.

b) *Convenciones en los sistemas de medidas mecánicos.* — Si de la geometría pasamos a la mecánica, la parte convencional del sistema de unidades, aparte de la elección de las mismas, se hace aún más patente. En el sistema *CGS*, por ejemplo, en que las unidades fundamentales son:

de longitud L el *centímetro* (cm)

de masa M el *gramo-masa* (g)

de tiempo T el *segundo* (s)

la unidad derivada de fuerza resulta la dina. *¿La dina?* ¿En virtud de qué convención? Según el principio de masa de NEWTON la aceleración a que adquiere un punto material de masa m, bajo la acción de una fuerza F, es *proporcional* a F y está en razón inversa de m, o sea:

$$a = C\frac{F}{m}, \qquad [1]$$

donde C es una constante. Si *se conviene* en hacer que la constante C sea igual a la unidad sin dimensiones (C es igual al *número* uno) entonces sí

$$F = m\,a,$$

y la dina resulta ser la fuerza que imprime al gramo-masa la aceleración de un centímetro por segundo y por segundo ($a = 1\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$).

Con esa convención de hacer $C = 1$, las dimensiones de la fuerza son:

$$[\mathrm{F}] = [\mathrm{M\,L\,T^{-2}}] = [\mathrm{g\,cm\,s^{-2}}].$$

La ley de gravitación de NEWTON en este sistema CGS (porque pueden haber muchos, en realidad infinitos, sistemas $C\,G\,S$) se expresa así:

$$F = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}, \qquad [2]$$

donde la constante G de gravitación vale:

$$G = 6{,}66 \times 10^{-8}\ [\mathrm{cm}^3\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}]$$
$$G = 6{,}66 \times 10^{-11}\ [\mathrm{m}^3\ \mathrm{Kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}] \qquad [3]$$

Pero nada impide que *se convenga* en hacer la constante G de [2] igual a la unidad sin dimensiones, con lo cual la ley de gravitación de NEWTON se expresaría así:

$$F = \frac{m_1\, m_2}{r^2} \qquad [4]$$

y de este modo la unidad de fuerza, en este sistema, sería aquélla con que un gramo-masa puntual atrae a otro gramo-masa, también puntual, colocado a la distancia de un centímetro. Las dimensiones de la fuerza, en este sistema *C G S*, serían:

$$[\mathrm{F}] = [\mathrm{M}^2\ \mathrm{L}^{-2}] = [g^2\ \mathrm{cm}^{-2}], \qquad [5]$$

y la constante C de [1] valdría:

$$C = 6{,}66 \times 10^{-8}\ [\mathrm{cm}^3\ g^{-1}\ s^{-2}]. \qquad [6]$$

Se ve así, claramente, que un sistema de unidades y de medida, no queda determinado con la sola elección de las unidades fundamentales. Con las mismas magnitudes fundamentales e idénticas unidades básicas pueden construirse infinitos sistemas. Piénsese en todos los sistemas *C G S* o *M K S* que podrían construirse eligiendo diferentes convenciones para la determinación de las constantes C_1 y C_2 de las expresiones:

$$F = C_1\, m\, a, \qquad [7]$$

$$F = C_2 \frac{m_1\, m_2}{r^2}. \qquad [8]$$

No sólo puede fijarse el valor y las dimensiones de una de estas dos constantes arbitrariamente, sin variar las unidades fundamentales de masa, longitud y tiempo, sino que también, convirtiendo la masa en magnitud derivada, pueden elegirse libremente los valores y las dimensiones de ambas constantes. Así, por ejemplo, en el sistema astronómico, se hacen ambas constantes iguales a la unidad sin dimensiones:

$$C_1 = C_2 = 1, \qquad [9]$$

con lo cual la fuerza con que se atraen dos masas m_1 y m_2 separadas por la distancia r se expresaría así:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 = \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad [10]$$

de lo cual resulta, haciendo $m_1 = m_2 = m$, y $a_1 = a_2 = a$,

$$m a = \frac{m^2}{r^2}; \; m = r^2 a; \; [m] = [L^3 T^{-2}]. \qquad [11]$$

La unidad de masa, en este sistema bidimensional de unidades, sería aquella masa capaz de producir sobre otra masa igual a ella colocada a la unidad de distancia, la unidad de aceleración. Si como unidad fundamental de longitud se elige el centímetro y como unidad de tiempo el segundo, la unidad de masa resulta ser aquélla que satisfaga, de acuerdo con [2] y [3] la condición:

$$a = \frac{F}{m} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = G \frac{m}{r^2}; \qquad [12]$$

$$1\, \text{U}(m) = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \times 1 \frac{\text{cm}^2}{G} \cong 1 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}^2} \times \frac{1}{6{,}66 \times 10^{-8}\ \text{cm}^3\, \text{g}^{-1}\, \text{s}^{-2}}$$

$$1\, \text{U}(m) \cong \frac{10^8}{6{,}66}\ \text{gramo} \cong 1{,}5 \times 10^7\ \text{gramo} \qquad [13]$$

La ùnidad de fuerza de este sistema bidimensional, centímetro-segundo, resulta ser también, aproximadamente, igual a $1{,}5 \times 10^7$ dinas.

Si en cambio se hubiera elegido como unidad de longitud el metro, en lugar del centímetro, y subsistiera el segundo como unidad de tiempo, las unidades de masa y fuerza en este sistema bidimensional valdrían:

$$1\, \text{U}(m) \cong 1{,}5 \times 10^{13}\ \text{g} = 1{,}5 \times 10^{10}\ \text{kg}, \qquad [14]$$

$$1\, \text{U}(F) \cong 1{,}5 \times 10^{15}\ \text{din} = 1{,}5 \times 10^{10}\ \text{newton} \qquad [15]$$

En cuanto a las dimenciones de la masa y de la fuerza en este sistema bidimensional resulta:

$$[\text{masa}] = [m] = [L^3 T^{-2}] = [\text{longitud} \times \text{velocidad}^2] \qquad [16]$$

$$[\text{fuerza}] = [F] = [L^4 T^{-4}] = [\text{velocidad}^4] \qquad [17]$$

Observamos que dentro de un sistema bidimensional ($C_1 = C_2 = 1$) en lugar de hablar de la determinación experimental de la constante de gravitación, se hablaría de la determinación experimental de la "unidad absoluta" de la masa y de la fuerza.

A propósito de un ejemplo semejante MAX PLANCK expresa: *"Se ve aquí, nuevamente, que la dimensión de una magnitud física no es nada que sea inherente y propio de su naturaleza, sino que es una propiedad que depende de la elección convencional del sistema de medida. Si esta circunstancia se hubiera tenido siempre en cuenta se habrían ahorrado muchas inútiles controversias en la literatura física, en especial en lo que se refiere a los sistemas de medida electromagnéticos"*. Y el mismo PLANCK agrega en otra parte de su obra, al ocuparse del sistema de medida de GAUSS y de los sistemas de MAXWELL, electroestático y electromagnético: *"La circunstancia de que una determinada magnitud física posea en dos sistemas de medidas diferentes, no solamente valores distintos sino hasta dimensiones también distintas, ha sido interpretada a menudo, por algunos, como una contradicción de carácter lógico que necesitaría ser aclarada, en tanto que otros, a propósito de esto, plantean la cuestión acerca de la "verdadera" dimensión de una magnitud física"*. Y agrega a renglón seguido: *"De acuerdo a lo que precede no será necesario hacer consideraciones especiales para probar que una tal cuestión* (acerca de las verdaderas dimensiones de las magnitudes físicas) *no tiene más sentido que la que pudiera plantearse acerca del "verdadero" nombre de los objetos"*.

3. EJEMPLOS DE DIFERENTES SISTEMAS MECÁNICOS DE MEDIDA *C G S* y *M K S*. — Los ejemplos que hemos puesto hasta ahora muestran algo de la libertad que se tiene para fijar las convenciones que determinan a un sistema de medición, pero no alcanzan a mostrar hasta qué grado puede hacerse llegar aquella libertad. Por esta razón y para que no se insista en buscar las "verdaderas dimensiones" de cierta magnitud física, es que pondremos algunos ejemplos más. Como se advierte por el título de este párrafo consideraremos aquí solamente sistemas en los cuales las magnitudes fundamentales sean la longitud, la masa y el tiempo y las unidades correspondientes, en los sistemas *C G S.*, serán el centímetro, el gramo-masa y el segundo, en tanto que, en los sistemas *M K S*, las unidades de aquellas magnitudes básicas serán el metro, el kilogramo-masa y el segundo:

a) *Sistemas CGS o MKS en que se cumpla que el producto de las constantes* C_1 *y* C_2 de [7] *y* [8] *sea igual a la unidad sin dimensiones.* De [7] y [8] se obtiene para la aceleración con que se aproximarían dos masas iguales ($m_1 = m_2 = m$) separadas por la distancia r:

$$F = C_1 \, ma = C_2 \frac{m^2}{r^2} ;$$

$$a = \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{m}{r^2} . \qquad [18]$$

Además, llamando G a la constante de gravitación en los sistemas corrientes ($C_1 = 1$; $C_2 = G$) se tiene:

$$a = G \frac{m}{r^2} . \qquad [19]$$

Las magnitudes a, m, r, se miden en las mismas unidades en los dos sistemas —CGS o MKS— que se están considerando, por lo cual será:

$$\frac{C_2}{C_1} = G . \qquad [20]$$

Para el sistema que desea construirse se postula:

$$C_1 \, C_2 = 1 . \qquad [21]$$

de [20] y [21] se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= G^{-\frac{1}{2}} , \\ C_2 &= G^{\frac{1}{2}} ; \end{aligned} \right. \qquad [22]$$

cuyos valores y dimensiones en sistemas CGS o MKS de acuerdo a [3] resultan:

$$C_1 = 3{,}875 \times 10^3 \left[\mathrm{cm}^{-3/2} \, \mathrm{g}^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{s} \right] = 1{,}225 \times 10^5 \left[\mathrm{m}^{-3/2} \, \mathrm{kg}^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{s} \right]$$

$$[23]$$

$$C_2 = 2{,}581 \times 10^{-4} \left[\mathrm{cm}^{3/2} \, \mathrm{g}^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{s}^{-1} \right] = 8{,}161 \times 10^{-6} \left[\mathrm{m}^{3/2} \, \mathrm{kg}^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{s}^{-1} \right]$$

La unidad de fuerza en este sistema resulta ser:

$$\begin{aligned} 1\ U\,(\mathrm{F, C\,G\,S}) &\cong 2{,}581 \times 10^{-4} \text{ dinas,} \\ 1\ U\,(\mathrm{F, M\,K\,S}) &\cong 8{,}161 \times 10^{-6} \text{ newton.} \end{aligned} \qquad [24]$$

La dimensión de la fuerza en estos sistemas ($C_1 C_2 = 1$) es:

$$[\mathrm{F}] = \left[\mathrm{L}^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{M}^{3/2}\ \mathrm{T}^{-1}\right] \qquad [25]$$

b) *Sistemas* C G S *o* M K S *con dimensiones idénticas para la masa y la energía.* — Si se multiplica ambos miembros de la [7] por una longitud L *se obtiene*:

$$F\,L = C_1\, m\, a\, L$$

donde el primer miembro tiene las dimensiones de un trabajo o, lo que es lo mismo, de una energía. Para que esta energía tenga exactamente las mismas dimensiones que la masa será necesario que $F\,L/m$ sea un número puro, lo que se logra si las dimensiones de C_1 son tales que:

$$C_1 = \left[\frac{1}{a\,L}\right] = \left[\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{L}^2}\right] = \left[\frac{1}{\text{velocidad}^2}\right] \qquad [26]$$

Por lo tanto basta con que la constante C_1 tenga por dimensiones la inversa del cuadrado de una velocidad para que masa y energía sean, dimensionalmente, una misma cosa. Si se toma la velocidad que figura en [26] igual a la velocidad de propagación de la luz en el vacío c, entonces, la célebre fórmula de EINSTEIN que vincula la energía E con la masa m y la velocidad c, y que habitualmente se escribe $E = m\,c^2$, quedaría reducida a la simplísima expresión

$$E = m$$

Para esto basta con escribir en lugar de la [7]:

$$F = \frac{1}{c^2}\, ma\ , \qquad [27]$$

y, naturalmente, como debe cumplirse la [20] la [8] se expresaría así:

$$F = \frac{G}{c^2} \frac{m_1 m_2}{r^2} . \qquad [28]$$

Como el valor de c es:

$$c \cong 3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{s} = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{s} \qquad [29]$$

para hallar el valor de la fuerza unitaria en un sistema CGS habrá que pensar en los valores que deben asignarse a m y a en [27] para que resulte $F = 1$ y así se obtiene:

$$1\ \text{U}\ (\text{F, CGS}) \cong 9 \times 10^{20}\ \text{dinas} . \qquad [30]$$

En el sistema MKS resulta:

$$1\ \text{U}\ (\text{F, MKS}) \cong 9 \times 10^{16}\ \text{newton} \qquad [31]$$

Claro está que en un sistema CGS de esta clase la unidad de energía es el gramo-masa = unidad de fuerza $\times$ cm:

$$1\ \text{U}\ (\text{Energía, CGS}) = 1\ \text{gramo} \cong 9 \times 10^{20}\ \text{erg}, \qquad [32]$$

y en este sistema MKS:

$$1\ \text{U}\ (\text{Energía, MKS}) = 1\ \text{kg} \cong 9 \times 10^{16}\ \text{Joule}. \qquad [33]$$

c) *Sistemas* C G S *y* M K S *en los cuales la constante de* PLANCK *es un número sin dimensiones.* — Si multiplicamos ambos miembros de la [7] por una longitud y por un tiempo se tendrá

$$FLT = C_1\, ma\, LT , \qquad [34]$$

donde cada uno de los miembros de esta igualdad tiene las dimensiones de una energía por un tiempo. Para que esta magnitud mecánica, llamada acción, resulte adimensionada, bastará tomar las dimensiones de C_1 de modo tal que:

$$C_1 = \left[\frac{1}{m\, a\, L\, T}\right] = [\text{L}^{-2}\ \text{M}^{-1}\ \text{T}] . \qquad [35]$$

Tomemos por ejemplo C_1 igual a la unidad en un sistema *C G S* pero con estas dimensiones:

$$C_1 = 1\ [\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{s}]. \qquad [36]$$

Para la misma constante C_1 de [7] pero en el sistema *M K S* se tendrá

$$C_1 = \left[\left(\frac{\mathrm{m}}{100}\right)^{-2}\left(\frac{\mathrm{kg}}{1000}\right)^{-1}\mathrm{s}\right] = 10^7\ [\mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}] \quad [37]$$

La ecuación [7] en este sistema *C G S*, se escribe entonces

$$F = 1\ [\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{s}],\ m\,a, \qquad [38]$$

en tanto que en este sistema *M K S* se escribiría:

$$F = 10^7\ [\mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}].\ m\,a. \qquad [39]$$

La unidad de fuerza que se obtiene de [38] resulta ser igual a la dina ($m = 1\ g;.\ a = 1\ cm\ s^{-2}$) pero las dimensiones de esta "dina" difieren de las dimensiones que tiene en el sistema *C G S* común. La unidad de fuerza definida por [39] ($m = 10^{-7}\ kg,\ a = 1\ m\ s^{-2}$) resulta ser igual a 10^{-7} newton o sea igual a 10^{-2} dinas. Pero la unidad de energía en ambos sistemas resulta ser igual a *1 erg* y las dimensiones de la energía en ambos sistemas son las de la inversa de un tiempo (T^{-1}) y en este caso: S^{-1}.

El valor de la constante de Planck en los sistemas *C G S* y *M K S* comunes es:

$$h = 6{,}625 \times 10^{-27}\ [\mathrm{erg} \times \mathrm{s}] = 6{,}625 \times 10^{-34}\ [\mathrm{Joules} \times \mathrm{s}] \quad [40]$$

pero en el sistema (*C G S* [38]) y (*M K S* [39]) el valor de dicha constante *es el número sin dimensiones*:

$$h = 6{,}625 \times 10^{-27}. \qquad [41]$$

Es más aún: puede construirse un sistema. *longitud, masa, tiempo, C G S* o *M K S*, o cualquier otro *L M T*, en el cual la constante de Planck sea igual a la unidad sin dimensiones. Para ello asignamos a la constante C_1 de [7] el valor y las dimensiones:

$$C_1 = \frac{1}{H} = \frac{1}{6{,}625 \times 10^{-27}}\ [\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{s}]. \qquad [42]$$

De acuerdo a [20] la constante C_2 de [8] valdría ahora G/H En el sistema MKS la constante C_1 vale:

$$C_1 = \frac{1}{H} = \frac{1}{6{,}625 \times 10^{-34}} \, [\mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}]\,. \qquad [43]$$

Si en cualquiera de estos sistemas hallamos el producto de la unidad de fuerza por la unidad de longitud y por la unidad de tiempo, obtenemos el número *1 sin dimensiones* que resulta ser igual a la costante de PLANCK.

En este sistema la energía de un fotón ya no es igual a la constante de PLANCK por la frecuencia sino que dicha energía resulta ser exactamente igual a la frecuencia. Esto parece ser sumamente simple y quizá, alguien, ingenuamente, pudiera pensar en introducir un sistema de esta clase en la física cuántica. En verdad se trata aquí de un simple "escamoteo de prestidigitación"; la constante que se saca de un lado aparece en otro. En nuestro ejemplo la constante h fué trasladada y ocultada en la constante C_1 del segundo principio de la dinámica que define la fuerza. De este modo ella aparecerá, por ejemplo, en la fórmula de la energía cinética.

Al llegar a este punto quizá piense el lector en el escenario en el que se desarrolla habitualmente el drama del electromagnetismo y en el cual el personaje principal (¡nada menos que la constante c!) aparece oculta graciosamente, entre los pliegues de ciertos telones de fondo, que se designan pomposamente con los nombres de "constante dieléctrica del vacío" y "permeabilidad magnética" del mismo vacío.

d) *Otro modo de hacer desaparecer una constante.* — Hemos visto ya como puede hacerse para que las dos constantes C_1 y C_2 de [7] y [8] se reduzcan, ambas, a la unidad sin dimensiones, cambiando para ello, convenientemente, las unidades de masa y fuerza. En ese caso se pasaba de un sistema de medida tridimensional a otro bidimensional. También vimos cómo, cambiando el sistema de medida, es posible identificar la masa con la energía o hacer igual a la unidad sin dimensiones a la constante de PLANCK. En estos casos lo que se variaba era la unidad de medida de la fuerza y sus dimensiones.

El caso más simple, y que se emplea con frecuencia en las exposiciones de la teoría de la relatividad es considerar adimensionada e igual a la unidad a la velocidad c de propagación de la luz en el vacío, de modo que en la fórmula que da el camino recorrido l por un rayo de luz, en un tiempo t

$$l = ct,$$

al hacerse $c = 1$, resulta $t = l$, o sea que el tiempo está medido por el camino recorrido por un rayo de luz. De este modo el *metro-luz*, sería el tiempo que emplearía un rayo de luz en recorrer un trayecto de un metro. En un sistema así, en el cual la magnitud fundamental fuera la longitud L, el tiempo se mediría en metros o en centímetros o en millas, en tanto que si la magnitud fundamental es el tiempo T las distancias se medirían en *segundos-luz* (300000 km) o *años-luz*, etcétera. o sea por el *tiempo* que un rayo de luz tardaría en recorrerlas.

Además una constante puede hacerse desaparecer por *"absorción"*, introduciendo una nueva magnitud. Este proceso tiene particular importancia en todo lo referente a los sistemas electromagnéticos de medida y, para comprenderlo, partiremos de un ejemplo mecánico. La fórmula que expresa la ley de gravitación de NEWTON puede escribirse así:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{m_1 \sqrt{G} \cdot m_2 \sqrt{G}}{r^2}, \qquad [44]$$

Si introducimos ahora una nueva magnitud M tal que

$$M_1 = m_1 \sqrt{G}; \quad M_2 = m_2 \sqrt{G};$$
$$M = m \sqrt{G}; \qquad [45]$$

que podríamos llamar *masa pesante*, la [44] se escribiría

$$F = \frac{M_1 M_2}{r^2} \qquad [46]$$

La constante de gravitación ha desaparecido y podemos seguir midiendo la fuerza en dinas si se trata del sistema $C\,G\,S$ o en newton si del $M\,K\,S$. Habituados a la [46] se hablaría, no de la determinación de la constante de gravitación, sino de la determinación experimental de la relación entre la masa pesante M y la masa de inercia m, y en tal caso, sabríamos hasta de memoria, que

$$\frac{M}{m} = 2{,}581 \times 10^{-4} \, [\mathrm{cm}^{3/2} \, \mathrm{g}^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{s}^{-1}] =$$
$$= 8{,}161 \times 10^{-6} \, [\mathrm{m}^{3/2} \, \mathrm{kg}^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{s}^{-1}] \, . \qquad [47]$$

Si se acostumbrara a presentar la mecánica en esta forma, no daría tanto trabajo explicar la proporcionalidad, hecha famosa por EINSTEIN, al sentar su principio de equivalencia, entre las masas pesante e inerte de cualquier cuerpo.

4. Razones por las cuales se propone un nuevo sistema de unidades y medidas eléctricis y magnéticas. — Se conocen y se usan actualmente los siguientes sistemas de unidades:

1) *Sistema electroestático C G S* .... Maxwell I

2) *Sistema electromagnético C G S* ...... Maxwell II

3) *Sistema llamado práctico*, derivado fundamentalmente del sistema electromagnético *C G S* en el cual se modifican las unidades originarias por la introducción de factores constituídos por potencias enteras de diez.

4) *Sistema C G S* (que podría ser también *M K S*) de Gauss.

5) *Sistema* Giorgi, tetradimensional. *M K S Q* (metro- kilogramo-masa, segundo, coulomb).

Además cada sistema puede ser "racionalizado" o no, de acuerdo al lugar en que se decida colocar en ciertas fórmulas al factor 4π pues aún no existe, ni entre físicos ni entre técnicos, unanimidad acerca de esta cuestión calificada de "vidriosa" por Palacios, y que se origina en una proposición de Heavside que se reveló contra lo que llamó el *"diluvio de los 4π"* y sobre la cual se mostraba escéptico Lord Kelvin, argumentando que los 4π que se hacen desaparecer de unas fórmulas aparecen en otras. En cambio, la idea de Heavside de hacer desaparecer el factor 4π de las ecuaciones de Maxwell, fué acogida con entusiasmo por H. A. Lorentz y seguida por muchos autores. Veremos cómo, en el *sistema simétrico que proponemos, esta cuestión de la racionalización se resuelve por sí sola en forma automática.*

El sistema Giorgi tiene la ventaja de que la mayoría de sus unidades pertenecen al sistema práctico, pero, no obstante, por diversas circunstancias el problema de la elección de un sistema adecuado de unidades eléctricas no puede considerarse aún como resuelto. El profesor T. Isnardi piensa, por ejemplo, que el sistema de Gauss perdurará probablemente en la física atómica y en la teoría especial de la relatividad en tanto que en la técnica podríase seguir utilizando algún otro sistema. Naturalmente que esto no puede constituir ninguna solución ideal, como lo hace notar el mismo profesor Isnardi, ya que, entre lo que es "técnica" y lo que es "ciencia pura" no puede trazarse, en los tiempos actuales, ninguna división neta. Debemos procurar, en consecuencia, elaborar un sistema de unidades coherente consigo mismo, que tenga las indudables ventajas del sistema GIORGI y, en lo posible, sin sus inconvenientes. Entre estos, aparte de los ya mencionados en el informe del profesor Isnardi, son dignos de tenerse en cuenta algunos otros puestos de manifiesto por diferentes autores. Entre nosotros cabe mencionar la crítica formulada al sistema GIORGI por el profesor SIMONOFF casi inmediatamente después de haber sido adoptado aquel sistema de medida por el Congreso Internacional de Electrotécnica de 1935. En la página 265 del trabajo de SIMONOFF puede leerse: *"La primera consecuencia del dimensionamiento de* μ_0 *y* ε_0 (permeabilidad magnética y constante dieléctrica del espacio vacío) *es la introducción del concepto de que la inducción eléctrica* ($\mathcal{D}$) *y la magnética* ($\mathcal{B}$) *son cantidades no homogéneas con las intensidades de campo respectivo* $\mathcal{E}$ *y* $\mathcal{H}$*"*.

Para nosotros lo fundamental no es que el vector $\mathcal{D}$ tenga dimensiones físicas diferentes a las del vector $\mathcal{E}$ ($\mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E}$) que el vector $\mathcal{H}$ no sea homogéneo con el vector $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{H}$) lo fundamental, es decir lo inconveniente, es que el campo eléctrico tenga dimensiones físicas diferentes a las del campo magnético. Expliquemos esto más detenidamente. Si se tiene un campo de vectores A puede resultar conveniente, para la descripción de ciertos fenómenos, considerar otro campo de vectores B tal que

$$\vec{B} = C\,\vec{A}$$

donde C es una constante, dimensionada o no, y siempre podrá buscarse una designación apropiada para los vectores A y B. Así, por ejemplo, la intensidad del campo gravitatorio originado por una masa puntual M, en un punto P, tiene por expresión

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^3}\vec{r},$$

si r es el vector que va desde M a P. Nada impide ahora que consideremos otros campos de vectores g' o g'', etcétera, definidos así:

$$\vec{g'} = \frac{1}{G}\vec{g}\,;\ \vec{g''} = \frac{1}{\sqrt{G}}\vec{g}\,;\ \text{etc.},$$

Pero eso sí: después de introducidos los vectores g' o g'', *etcétera*, deberemos cuidarnos de no caer en la tentación de discutir acerca de si g es la "causa" de g' o viceversa o empeñarnos en descubrir la "verdadera analogía" existente entre el par de vectores g' y g y el otro par x', x.

Desde cierto punto de vista puede parecer conveniente que el campo eléctrico difiera dimensionalmente del campo magnético ya que el primero se explora, en principio, con un péndulo eléctrico y el segundo con una aguja magnética. Pero he aquí que una *carga eléctrica en movimiento* origina, además de un campo eléctrico, un campo magnético. Pero, ¿qué significa *"en movimiento"*? En la época del éter en reposo absoluto de Lorentz, tenía sentido hablar del movimiento de la carga con respecto a ese éter y, en consecuencia, el campo magnético existía o no según que dicha carga fuera móvil o inmóvil. Pero hoy (hace ya más de cincuenta años que apareció la teoría de la relatividad de Einstein) sabemos que no tiene sentido hablar de un movimiento con respecto al éter. En consecuencia una carga eléctrica cualquiera estará *realmente* en reposo, o estará *realmente* en movimiento, según sea el sistema de referencia que se adopte. Siendo así, y para no salir del marco de la teoría restringida de la relatividad (sistemas inerciales de referencia y traslaciones uniformes) consideremos una carga eléctrica que se encuentra en reposo en el sistema de referencia S' y que en cambio se mueve con una velocidad v constante respecto de otro sistema S.

Para fijar ideas imaginaremos que la carga eléctrica que origina el campo, está constituida por una esfera metálica cargada, fija en el centro de un vagón de tren. Con respecto al tren existe sólo un campo eléctrico pero con respecto al sistema de la vía existe, además de un campo eléctrico, un campo magnético. Pero esa esfera que imaginamos transportada por ese tren, se mueve con una velocidad v respecto de la vía, con velocidad V_1 respecto al sistema de aquel avión S_1, con velocidad V_2 respecto a tal otro sistema S_2, etcétera. En cada sistema que se considere el campo magnético será diferente y en el sistema *propio* de la carga que origina el campo, o sea en el sistema respecto al cual la carga está en reposo, el campo magnético es cero y sólo aparece un campo eléctrico. Justamente esto es lo que buscó explicar Einstein en su célebre memoria de 1905 sobre la teoría de la relatividad y que por ello tituló *"Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento"*. Allí aparecen unas fórmulas de transformación del campo de las que nos ocuparemos más adelante y que, como veremos, pueden ser interpretadas geométricamente, de modo tal que, campo magnético y eléctrico, son sólo componentes, algo así como proyecciones en diferentes direcciones de un único ente que se denomina hexavector del campo. Estas razones inducen a pensar en la conveniencia de la construcción de un sistema de unidades y medidas en el cual las intensidades de ambos campos se expresen por la misma unidad y sean, naturalmente, dimensionalmente homogéneas. Podría argüirse que en la construcción de un sistema de unidades no deben hacerse intervenir conceptos teóricos susceptibles de experimentar modificaciones. Pero obsérvese que lo que se busca no es introducir de antemano, en el sistema de unidades, conceptos de la teoría de la relatividad, no; lo que se busca es que quede expresado, ya en el sistema de medidas, un hecho experimental de trascndental importancia. Este hecho es expresado por el propio Einstein de la siguiente manera, al comienzo, justamente, de su memoria fundamental: "Es sabido que la aplicación de la electrodinámica de Maxwell a los cuerpos en movimiento, en la forma en que actualmente se acostumbra a hacerla, conduce a asimetrías que no parecen intrínsecas de los fenómenos mismos. En la interacción de un imán y un conductor, por ejemplo, el fenómeno observable depende sólo del movimiento relativo entre ambos, mientras que su interpretación usual exige la consideración, rigurosamente separadas, de dos casos según se mueva uno u otro de los cuerpos: si es móvil el imán y queda quieto el conductor, en el entorno del primero aparece un campo eléctrico que posee cierta energía y que origina una corriente en los lugares en que hay partes del conductor. Si en cambio es el conductor el que se mueve y el imán el que queda en reposo, no aparece campo eléctrico en el entorno del imán; sin embargo, en el conductor aparece una fuerza electromotriz que no posee energía de por sí, pero que da lugar a corrientes de igual intensidad y sentido que las originadas en el caso anterior, por las fuerzas eléctricas, supuesto que en ambos casos el movimiento relativo haya sido el mismo".

Veamos ahora qué consecuencias relacionadas con los sistemas de medición de campos eléctricos o magnéticos pueden extraerse de las reflexiones que anteceden: si sobre esta mesa tenemos un imán fijo a la misma, con respecto al sistema de la mesa, existe sólo un campo magnético. Pero con respecto a cualquier otro sistema que se mueve con respecto a la mesa tendremos, además de un campo magnético, un campo eléctrico, que se pone de manifiesto en lo que llamamos "corrientes inducidas", pues es el campo eléctrico el que pone en movimiento a las cargas eléctricas libres (electrones o iones) de los conductores.

Pero este fenómeno —producción de corrientes inducidas— depende sólo del movimiento relativo entre el imán y el conductor y, si campo eléctrico y campo magnético fueran algo esencialmente diferentes entre sí, al punto de que conviniera considerarlos dimensionalmente heterogéneos, aparecerían los fenómenos de *"producción"* ("creación") de campos magnéticos por el movimiento de una carga o por el movimiento del observador * cerca de la carga o "producción" de campos eléctricos por el movimiento de un imán o por el movimiento del observador en las cercanías del "imán" como algo totalmente incomprensible, lindante con la magia.

5. Los FUNDAMENTOS DEL SISTEMA SIMÉTRICO M K S Q. — Todo el sistema se apoya en tres leyes básicas o fundamentales que son:

1) Ley de Coulomb de electroestática,
2) Ley de Coulomb del magnetismo,
3) Ley de Lorentz,

que, para el *espacio vacío*, y con respecto a un sistema inercial, escribiremos así:

$$F = k\frac{q\,q'}{r^2}; \qquad [48]$$

$$F = k\frac{m\,m'}{r^2}; \qquad [49]$$

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{H}\right) \qquad [50]$$

con las definiciones habituales del campo eléctrico E y del campo magnético H:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad [51]$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad [52]$$

* Cuando en física se habla de un "observador", éste no es necesariamente un hombre de carne y hueso. El "observador" puede ser una máquina fotográfica, un electrómetro registrador, un alambre, una aguja magnética, etcétera.

Por el momento nos limitaremos a considerar que los fenómenos ocurren en el espacio libre, aún cuando, desde el punto de vista de la teoría electrónica de *Lorentz*, no existe ninguna diferencia esencial entre uno y otro caso, pues un electrón o un átomo cargado, *se mueve siempre en el espacio vacío*. Claro está que el electrón o el ión está sometido entonces a la acción de las cargas eléctricas de los demás átomos y electrones, aparte de las acciones macroscópicas. Hemos indicado también que las ecuaciones escritas están referidas a un sistema inercial de coordenadas, hecho éste que, por lo general, deja de mencionarse, quizá por que se piensa en el espacio absoluto de la mecánica newtoniana. La necesidad de que el sistema sea inercial se advierte con un sencillo ejemplo: si suponemos una esfera cargada fija cerca de la periferia de un disco en rotación se tendrá, en el centro del disco, además de un campo eléctrico un campo magnético. Esto nos dice que, en principio, el movimiento de rotación de la Tierra podría ser revelado por experimentos de carácter electromagnético *.

El hecho de que partamos de las leyes de Coulomb para definir nuestro sistema simétrico de unidades no es, naturalmente, esencial, pero nos pareció bien partir de expresiones en las cuales figurara explícitamente la fuerza. Al referirse a este asunto el profesor SIMONOFF dice lo siguiente: "El procedimiento de Heavside consiste en definir la masa eléctrica o magnética mediante el flujo de intensidad de campo saliente de la masa, en vez de recurrir a la ley de Coulomb... Aparece así en la literatura cierta aversión, bastante marcada, contra la ley de Coulomb. En materia de definiciones de unidades se puede partir, evidentemente, de una magnitud cualquiera, puesto que todas están ligadas por leyes establecidas. La ley de Coulomb es objetada frecuentemente por incluir implícitamente el concepto de *acción a distancia*; pero esta aserción no es exacta, por cuanto ni la ley, ni la teoría de los campos newtonianos, de ahí derivada, encierran hipótesis alguna referente al mecanismo de la acción de las masas. Es una ley experimental, perfectamente exacta y nada más". Y continúa más adelante: "La ley de Coulomb es apta por consiguiente para basar en ella la metrología electromagnética, y es más lógico recurrir directamente a una ley establecida experimentalmente

* El físico norteamericano MICHELSON, el mismo que, con su célebre experimento, mostró que el movimiento de *traslación* de la Tierra es irrevelable ópticamente, logró, en 1925 (Astrophys. Journal, 61, 140), revelar el movimiento de *rotación* de la Tierra, haciendo interferir dos haces de luz que recorrían, en sentido inverso, un perímetro que abarcaba una gran superficie.

con toda precisión, que a un teorema deducido de la misma".

En consecuencia partiremos para establecer nuestro sistema de unidades de las fórmulas que van de [48] a [52]. Si se suponen dadas ya las unidades mecánicas el sistema quedará determinado dando el valor y las dimensiones de las dos únicas constantes k y c que figuran en las fórmulas escritas más arriba. Como se quiere que E tenga las mismas dimensiones que H y la v de [50] es la velocidad conque se mueve la carga q, la constante c tendrá que tener las dimensiones de una velocidad.

En el sistema $M\,K\,S$, c se expresará entonces en m/s. La unidad de la carga eléctrica queda determinada dando el valor de k, pero lo que se fija por convención es el cociente k/c^2 que se hace que sea exactamente igual, en el sistema *metro, kilogramo, segundo* y *coulomb* a

$$\frac{k}{c^2} = 10^{-7} \text{ (Sistema M K S Q)} \qquad [53]$$

Se ha procedido así por razones históricas. Veremos líneas más abajo que de la [49] y [50] puede deducirse fácilmente la fuerza que se ejerce entre dos corrientes eléctricas e indefinidas. Esa fuerza resulta ser:

$$F = \frac{k}{c^2} \cdot \frac{2\, I_1\, I_2}{R} \cdot l, \qquad [54]$$

siendo R la distancia que separa a las corrientes de intensidadesI_1 e I_2 y F la fuerza de atracción (si las corrientes tienen igual sentido) por cada trozo de longitud l. La intensidad I de una corriente se define por el cociente entre la cantidad de electricidad q que pasa por determinada sección de un conductor en el tiempo t y dicho tiempo:

$$I = \frac{q}{t}, \qquad [55]$$

tratándose de una corriente estacionaria. De lo contrario, en cada instante se tendría $I = \frac{dq}{dt}$. Pues bien, en el sistema electromagnético de Maxwell, se hacía igual a la unidad sin dimensiones al coeficiente de la [54] con lo cual aquélla se escribía:

$$F = \frac{2\, I_1\, I_2}{R}\, l, \qquad [56]$$

y se tenía la *"unidad electromagnética de intensidad"* ($I = I_1 = I_2 = 1$) si $R = 1\ cm$, $l = 1\ cm$, y $F = 2$ dinas, pues el sistema que se utilizaba era el *C G S*.

Pero esta unidad electromagnética de intnsidad pareció demasiado grande y se adoptó, en consecuencia, como "unidad práctica" otra llamada luego *Ampere* que es diez veces menor que la unidad electromagnética *C G S*. Si consideramos entonces que $I_1 = I_2 = 10\ ampere$ y $R = 100\ cm = 1\ m$, $l = 100\ cm = 1\ m$ la fuerza de atracción por metro de longitud será, aplicando a este caso la [56] y teniendo en cuenta que 10 ampere es igual a la unidad electromagnética:

$$F = \frac{2 \times 1 \times 1}{100} \times 100 = 2 \text{ dinas} = 2 \times 10^{-5} \text{ newton.}$$

Ahora bien, aplicando la [54] al caso del ejemplo, nos dará el valor precedente, siempre que el coeficiente tenga el valor dado en [53]. Por eso al fijar aquel valor se está definiendo indiretcamente el ampere y por intermedio de la [55] el coulomb.

Pero observemos que para conocer el valor de k habrá que determinar experimentalmente el valor de la constante c. Dicho valor resulta ser:

$$c = 2{,}99793 \times 10^8 \frac{m}{s} \cong 3 \times 10^8 \frac{m}{s}, \qquad [57]$$

que coincide con el valor de la velocidad de propagación de la luz en el vacío. De acuerdo a [57] y [53] se obtiene ahora para k:

$$k = 8{,}98758 \times 10^9 \left[\frac{\text{newton} \times m^2}{\text{coul}^2}\right], \qquad [58]$$

o aproximadamente:

$$k = 9 \times 10^9 \left[\frac{\text{newton} \times m^2}{\text{coul}^2}\right]. \qquad [59]$$

En resumen: el grupo de fórmulas que va de [48] a [52] con el valor convencional [53] definen al sistema a cuya unidad de carga o cantidad de electricidad se denomina *coulomb* o castellanizado *culombio*.

6. Relación con el sistema de Gauss. — El sistema de Gauss, también simétrico, queda definido por las mismas ecuaciones [48] a [52] haciendo en ellas a la constante k igual a la unidad sin dimensiones y tomando como unidades mecánicas a las del sistema *C G S*. Este sistema, llamado de Gauss, es tridimensional, pero puede hacerse tetradimensional si se elige como cuarta unidad la carga eléctrica definida cuando se hace la constante k igual a la unidad. En otros términos: la cuarta unidad sería la unidad cegesimal electroestática de carga eléctrica a la cual se le suele dar el nombre de franklin y que indicaremos así: f.

En consecuencia, en el sistema tetradimensional *C G S f* la constante k vale:

$$k = 1 \left[\frac{\text{dina} \times \text{cm}^2}{\text{f}^2}\right] \qquad [60]$$

Si llamamos x a la relación numérica entre el coulomb y el franklin

$$\frac{\text{coulomb}}{\text{franklin}} = \frac{\text{coul}}{\text{f}} = x,$$

por ser

$$\frac{\text{newton}}{\text{dina}} = 10^5\,; \frac{\text{m}}{\text{cm}} = 10^2\,;$$

se tendrá, de acuerdo a [58], a [60] y a lo que precede:

$$k = 8{,}98758 \times 10^9 \left[\frac{10^5 \text{ dina} \times 10^4 \text{ cm}^2}{\text{x}^2 \text{ f}^2}\right] =$$

$$= \frac{8{,}98758 \times 10^{18}}{\text{x}^2} \left[\frac{\text{dina} \times \text{cm}^2}{\text{f}^2}\right] = 1 \left[\frac{\text{dina} \times \text{cm}^2}{\text{f}^2}\right];$$

de donde

$$x = \frac{\text{coul}}{\text{f}} = 10^9.\sqrt{8{,}98758} = 2{,}99793 \times 10^9 \cong 3 \times 10^9. \qquad [61]$$

Aun cuando "para salir del paso" se suele utilizar esta relación para definir el coulomb, tal cosa deja de ser aceptable cuando esa carga habrá de convertirse en una unidad fundamental que figurará junto al metro, al kilogramo-masa y al segundo. Aun cuando se diera en la pretendida definición una relación numérica con 6 o más cifras, esa no sería en verdad una definición satisfactoria, por que no se alcanzaría a comprender el porqué de una elección numérica tan rara. Por lo tanto no hay otro recurso que indicar desde el comienzo que el coulomb queda definido por el valor adoptado convencionalmente en [53]. Pero lo malo es que todavía queda sin comprenderse cómo se efectúa la determinación experimental de la constante c, por lo cual no hay más remedio que prometer que la cuestión ha de ser aclarada más tarde *.

La unidad de intensidad de campo eléctrico o magnético en el sistema simétrico $M\,K\,S\,Q$ se obtiene de [51] o [53] cuando F es un newton y q (o m) un coulomb:

$$1\,\mathrm{U}\,(\mathrm{MKSQ})\ \begin{matrix}\text{de intensidad}\\ \text{de campo}\end{matrix} = 1\,\frac{\text{newton}}{\text{coul}}, \qquad [62]$$

y la unidad de intensidad de campo en el sistema $C\,G\,S\,f$, tetradimensional, de Gauss, es

$$1\,\mathrm{U}\,(\mathrm{CGSf})\ \begin{matrix}\text{de intensidad}\\ \text{de campo}\end{matrix} = 1\,\frac{\text{dina}}{\text{franklin}}. \qquad [63]$$

Esta última unidad coincide con la unidad de intensidad de campo eléctrico en el sistema electroestático.

El hecho de que la intensidad del campo eléctrico y la intensidad del campo magnético tengan la misma unidad puede resultar chocante ya que ambos campos se exploran de diferente modo y tienen visiblemente características distintas. El diferente comportamiento de E y H salta a los ojos, además, en la fórmula [50] que traduce la ley de Lorentz pues, cuando la carga se mueve paralelamente a las líneas del campo magnético, la fuerza que éste ejerce sobre aquélla es nula. Los partidarios de sistemas asimétricos, como el sistema Giorgi, pueden hacer hincapié en estas diferencias para justificar que a ambos campos se les atribuya dimensiones y unidades de me-

* Lógica y didácticamente, estas definiciones "a crédito", en el sentido de que, "ya se verá más adelante" etcétera, son desagradables, pero el desarrollo histórico del asunto obliga a ello. Naturalmente que este defecto es común a todos los sistemas que procuran hacer coincidir sus unidades racionales derivadas, con unidades prácticas preexistentes. En el sistema de Gauss, donde se hace $k = 1$, dimensionada o no, no es necesario apelar a explicaciones que se habrían de dar más adelante.

dida diferentes. Sí, todo puede ser justificado; pero convendría que se tuviera presente, por ejemplo, que el momento estático de una fuerza tiene idénticas dimensiones que un trabajo mecánico; que la densidad de energía es dimensionalmente igual a la presión, etcétera, o sea que magnitudes diferentes pueden aparecer con las mismas dimensiones físicas sin que ello origine confusión alguna. No obstante, así como distinguimos la componente Ex del campo eléctrico, de la componente Ey, colocando a cada una de ellas un subíndice distinto, así también distinguimos las componentes magnéticas Hx, Hy, Hz de las componentes eléctricas cambiando sólo las letras que sirven para designarlas, pero *no las dimensiones físicas*.

Se tienen, pues, seis componentes de un único ente que, como ya hemos dicho, recibe el nombre de ***hexavector*** del campo electromagnético. Puede comprenderse muy fácilmente porqué aquel ente tiene 6 componentes. En el espacio común de tres dimensiones se tienen tres ejes: x; y; z; y tres planos: xy; xz; yz. Pero "un acontecimiento", "un suceso" o lo que se llama "un punto de universo" queda determinado si además de indicar el lugar *dónde* ocurre (las coordenadas x, y, z) indicamos también el instante t, el *cuándo* del acontecer. Desde la época de Descartes se utiliza el tiempo como una cuarta coordenada, aunque el estrecho parentesco entre el espacio y el tiempo sólo fué puesto de manifiesto por MINKOWSKI en una célebre memoria que apareció en el año 1908, o sea tres años después de la aparición de la teoría restringida de la relatividad de Einstein. Por eso es conveniente, para la descripción de los fenómenos del universo, agregar al sistema de coordenadas espacial x, y, z, una cuarta coordenada temporal que se designa frecuentemente con la letra u y que se hace igual al producto de la velocidad de la luz en el vacío, c, por el tiempo t. Se tiene, pues, un sistema de coordenadas con cuatro ejes:

$$x;\ y;\ z;\ u;$$

y *seis* planos a los cuales pueden pensarse "asociadas" las seis componentes del campo electromagnético de acuerdo al esquema:

xu ——— E_x	yz ——— H_x
yu ——— E_y	zx ——— H_y
zu ——— E_z	xy ——— H_z

Veremos más adelante esto mismo en forma más detallada y veremos también como se representa geométricamente a este ente de seis componentes. Aquí sólo queríamos dar una primera justificación del hecho de que se mida el campo eléctrico y el campo magnético con la misma unidad.

Sin embargo, así como el campo eléctrico se designa con una letra y el magnético con otra, resulta conveniente dar un nombre distinto a las unidades de intensidades de campo eléctrico y magnético.

En el sistema de Gauss, también simétrico, la unidad de intensidad del campo eléctrico coincide con la unidad electrostática $C\,G\,S$ que no tiene nombre especial, en tanto que, la unidad de intensidad de campo magnético, coincide con la unidad cegesimal electromagnética, que recibió el nombre de gauss. Para la unidad de intensidad de campo magnético en el sistema simétrico $M\,K\,S\,Q$ proponemos el nombre de *lorentz*. La relación entre el lorentz y el gauss es, de acuerdo a [62], [63] y [61], la siguiente:

$$1 \text{ lorentz} = 1 \,\frac{\text{newton}}{\text{coul}} \cong \frac{10^5 \text{ dina}}{3 \times 10^9 \text{ f}} \cong \frac{1}{3 \times 10^4} \text{ gauss.} \qquad [64]$$

De acuerdo a esto, el campo magnético terrestre cuya intensidad es del orden de 0,2 gauss, resulta ser igual, aproximadamente, a 6000 lorentz. Se tiene pues:

$$1 \text{ gauss} \cong 30000 \text{ lorentz} \qquad [65]$$

Como vemos en el sistema simétrico, el "lorentz", no coincide con la unidad utilizada en la práctica, que es el gauss. Tampoco existe coincidencia entre el gauss y *las unidades* de campo magnético del sistema Giorgi. Ponemos unidades en plural porque en este sistema, como veremos más adelante, para el campo magnético existen dos vectores: $\mathscr{B}$ y $\mathscr{H}$, y algunos autores opinan que la verdadera intensidad está dada por $\mathscr{B}$ y otros sostienen, en cambio, que propiamente es $\mathscr{H}$ el vector intensidad. Existen también tratados en los cuales, en una parte de los mismos es $\mathscr{B}$ el vector intensidad y en otra es en cambio $\mathscr{H}$. Lo cierto es que al campo de 1 gauss en el espacio vacío corresponde:

$$1 \text{ gauss} = \begin{cases} = 10^{-4} \text{ unidades de } \mathscr{B} \\ = \dfrac{10^3}{4\,\pi} \text{ unidades de } \mathscr{H} \end{cases} \qquad [66]$$

.El cociente de ambos vectores, una constante, es lo que se llama permeabilidad magnética del vacío μ_0:

$$\mu_0 = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H}} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [m kg Q}^{-2}\text{]}, \qquad [67]$$

donde Q significa coulomb.

7. Las leyes elementales del electromagnetismo expresadas en el sistema simétrico.

a) *Acción de un campo sobre una corriente.* — Según la teoría de Lorentz las corrientes de conducción son corrientes de convección producidas por el desplazamiento de cargas eléctricas en el interior de los conductores. En los conductores metálicos las cargas en movimiento estarán constituidas por electrones que, dada su carga negativa, se desplazan en sentido opuesto al sentido que, convencionalmente, se atribuye a la corriente eléctrica. En los electrolitos la corriente estaría constituida por un doble desplazamiento de iones en sentidos opuestos: los iones positivos en el sentido atribuido a la corriente; los negativos en sentido contrario.

Consideremos un conductor en el que haya N partículas libres por unidad de volumen, cada una de ellas con la carga e. Se quiere hallar la fuerza que un campo magnético H ejerce sobre un elemento de conductor de longitud dl cuando por él circula la intensidad I. Se trata de aplicar la [50] que, en lo referente a la fuerza del campo magnético, se reduce a:

$$\vec{F} = \frac{1}{c} q \, \vec{v} \wedge \vec{H}. \qquad [68]$$

Si llamamos S a la sección del conductor, en el elemento de longitud dl existirá una carga dq tal que:

$$dq = N\,e\,S\,dl$$

La fuerza dF que se ejercerá sobre el elemento de conductor si las partículas cargadas se desplazan con la velocidad $v = \dfrac{dx}{dt}$ será:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} \cdot Ne\,S\,dl \,.\, \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{H}. \qquad [69]$$

en que dx tiene la dirección de dl, al cual le atribuimos también un sentido de coincidencia con el sentido de la corriente. La intensidad de la corriente, o sea la cantidad de electricidad que pasa por la sección S del conductor dividida por el tiempo que tarda en pasar es:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{Ne\,S\,dx}{dt}, \tag{70}$$

y en consecuencia la [69] se transforma en:

$$\vec{dF} = \frac{1}{c} I\, \vec{dl} \wedge \vec{H}. \tag{71}$$

En particular si se trata de un campo uniforme, y sumergido en él un conductor rectilíneo de longitud l, siendo las líneas de fuerza del campo perpendiculares al conductor, la fuerza, si la intensidad es I, es:

$$F = \frac{1}{c} I l H. \tag{72}$$

b) *Ley de Biot y Savart.* — Consideremos ahora que el campo H está originado por un polo magnético norte de masa m, aislado, como si tal cosa fuera posible. Llamando r al vector que va desde la masa m al elemento de corriente, el campo H originado por esa masa m en el lugar donde está el elemento considerado es, de acuerdo a [49] y [52]:

$$\left|H\right| = \left|\frac{km}{r^2}\right|;\ \vec{H} = \frac{km}{r^3}\vec{r}. \tag{73}$$

Reemplazando este valor en [71] se tiene:

$$d\,F = \frac{1}{c}\, I\, \vec{d\,l} \wedge \frac{km}{r^3}\, \vec{r}\,. \tag{74}$$

Pero esta fuerza es igual y de sentido opuesto, por el principio de acción y reacción, a la fuerza que el elemento de corriente ejercerá sobre el polo magnético m y, en consecuencia, el campo dH que el elemento de corriente dl origina en el lugar donde está el polo m será dF/m o sea

$$\vec{d\,H} = \frac{k}{c}\, \frac{\vec{I\,d\,l}}{r^3} \wedge \vec{r}\,, \tag{75}$$

donde aquí, el vector r está dirigido desde el elemento de corriente al lugar donde supusimos que se encontraba el polo m. Si el ángulo formado por r y dl es θ, el módulo de dH es:

$$d H = \frac{k}{c} \frac{I d l}{r^2} \operatorname{sen} \theta . \qquad [76]$$

La [75] o la [76] expresan la ley diferencial de Biot y Savart. De ella se deduce que el campo producido por una corriente rectilínea indefinida, en un punto P, situado a una distancia R del conductor es:

$$H = \frac{k}{c} \frac{2 I}{R} , \qquad [77]$$

y en el centro de un conductor circular de radio R será:

$$H = \frac{k}{c} \frac{2 \pi I}{R} . \qquad [78]$$

c) *Fuerza magnetomotriz.* — El trabajo del vector H a lo largo de un camino cerrado que rodea al conductor por el cual circula la intensidad I, es:

$$\oint H . ds = 4 \pi \frac{k}{c} I . \qquad [79]$$

siendo $H.ds$ el producto escalar del campo H por el elemento ds de camino, producto que es igual a la componente de H en la dirección del camino seguido, H_s, por la longitud ds.

El primer miembro de [79] es la llamada "fuerza magnetomotriz" que, en los sistemas simétricos, debe medirse en la misma unidad en que se mida la fuerza electromotriz. Por lo tanto, en nuestro sistema simétrico $M\ K\ S\ Q$ la fuerza magnetomotriz se mide en volt. Aplicando la [79] al cálculo de la intensidad del campo magnético en el interior de un solenoide toroidal de n espiras y longitud de la circunferencia que pasa por los centros de todas las espiras igual a l se obtiene:

$$H = 4 \pi \frac{k}{c} \frac{n I}{l} . \qquad [80]$$

d) *Acción entre dos corrientes paralelas.* — Sean dos corrientes rectilíneas indefinidas y paralelas separadas por una distancia R. Naturalmente que la sección de los conductores debe ser pequeña en comparación de R, para que tenga sentido hablar de distancia. Llamemos I_1 a la intensidad de una de las corrientes, que produciría, de acuerdo a [77], el campo

$$H_1 = \frac{k}{c} \frac{2 I_1}{R},$$

en el lugar donde se encuentra la corriente I_2. Según [72] una porción de longitud l de esta última estará sometida a la fuerza:

$$F = \frac{1}{c} I_2 \, l \, H_1$$

o sea:

$$F = \frac{k}{c^2} \frac{2 I_1 I_2}{R} l, \qquad [81]$$

resultado que ya habíamos mencionado en [54].

Esta fórmula es la que se utiliza para la definición del ampere (y por lo tanto del coulomb que es 1 ampere × segundo) pero las determinaciones experimentales se hacen midiendo la fuerza de atracción, no entre "trozos de corrientes indefinidas" sino entre bobinas especiales.

e) *Momento magnético de una espira.* — Sea una espira rectangular de lados de longitud l y a por la cual circula una corriente de intensidad I. Supongamos que la espira se encuentra en un campo uniforme H cuyas líneas de fuerza son paralelas a los lados de longitud a. En este caso se ejercerá sobre cada uno de los lados de longitud l del rectángulo una fuerza cuyo valor está dado por la [72]. Pero estas dos fuerzas serán perpendiculares al plano del rectángulo y estarán dirigidas en sentidos opuestos originando una cupla cuyo momento estático es:

$$\mathcal{M} = Fa = \frac{1}{c} H I l a = \frac{1}{c} H I S, \qquad [82]$$

si llamamos S a la superficie de la espira.

Nos preguntamos ahora cuál debería ser el momento magnético de un imán en forma de barra para que colocado perpendicularmente a las líneas del mismo campo magnético se originara sobre él una cupla de momento igual a la de la espira.

Si llamamos m a la masa magnética de cada uno de los polos del imán, que se comporta, en el campo uniforme, como si dichas masas estuvieran concentradas en puntos separados por una distancia λ, la fuerza actuante sobre cada polo será $m\,H$, y el momento de la cupla $m\,H\,\lambda$. *Como por definición* $m\,\lambda = M$, es el momento magnético del imán, el momento estático de la cupla es $M\,H$, con lo cual igualando esto al valor dado en [82] resulta:

$$M = \frac{1}{c}\,S\,I\,. \tag{83}$$

Si dividimos esto por una longitud λ tendremos una masa magnética que, como sabemos, en el sistema simétrico, se mide en coulomb:

$$[m] = \frac{M}{\lambda} = \frac{1}{c}\,\frac{S}{\lambda}\,.\,\frac{Q}{t}\,.$$

Aquí se ha reemplazado I por una carga Q sobre un tiempo t y como S/λ es una longitud y longitud sobre tiempo es velocidad, resulta:

$$[m] = \left[\frac{v}{c}\,Q\right] = [Q]\,. \tag{84}$$

De modo que, efectivamente, la masa magnética tiene dimensiones iguales a una cantidad de electricidad, no obstante lo cual puede considerarse que ella, la masa magnética, es proporcional a una velocidad, en otros términos como si la misma, siguiendo las ideas de AMPÉRE fuera originada por cargas eléctricas en movimiento.

Para los cálculos efectivos, utilizando las fórmulas del presente párrafo, conviene tener presente que

$$\frac{k}{c} \cong \frac{9 \times 10^8}{3 \times 10^8}\,[\mathrm{M\,K\,S\,Q}] = 30\ \mathrm{ohm}\,, \tag{85}$$

$$\frac{k}{c^2} = 10^{-7}\left[\frac{\mathrm{newton}}{\mathrm{amp}^2}\right]. \tag{86}$$

Además seguimos todavía suponiendo que las acciones entre corrientes o entre corrientes e imanes se ejercen a través del espacio libre de materia.

8. RELACIÓN ENTRE EL SISTEMA SIMÉTRICO Y EL DE GIORGI. — La intensidad del campo eléctrico producido por una única carga q concentrada en un punto, a la distancia r de la misma, es, de acuerdo a [48] y [51]:

$$E = k \frac{q}{r^2}, \qquad [87]$$

que tiene la dirección de r y donde E es un vector que está dirigido hacia el exterior si la carga es positiva. El flujo del vector E a través de una superficie que envuelve la carga q, igual, por convención, al "número de líneas N" de fuerza, que salen (si q es positiva) de la carga q se halla fácilmente si se calcula ese flujo considerando una superficie esférica de radio r y con centro en la carga. Para ello basta multiplicar la [87] por la superficie de la esfera, $4 \pi r^2$ obteniéndose:

$$N = 4 \pi k q, \qquad [88]$$

que es la expresión del teorema de Gauss. Consideramos que la [88]) vale en todos los casos cualquiera sea la distribución de las cargas, o sea, que el flujo resultante saliente a través de una superficie cerrada será igual a la constante $4 \pi k$ por la suma algebraica de todas las cargas que se encuentran en el interior de la superficie considerada.

Si suponemos ahora que esa superficie cerrada es infinitamente pequeña y que encierra un volumen dv, en cuyo interior se encuentra la carga dq, el flujo dN a través de la superficie dS que estamos considerando será:

$$dN = 4 \pi k \, dq,$$

y dividiendo por el elemento de volumen dv y llamando ϱ a la densidad de volumen de las cargas eléctricas ($\varrho = dq/dv$) se tendrá:

$$\frac{dN}{dv} = 4 \pi k \varrho .$$

Pero el primer miembro de esta expresión es la divergencia del vector E por lo cual

$$\operatorname{div} E = 4 \pi k \varrho \qquad [89]$$

que también puede escribirse así:

$$\operatorname{div}\left(\frac{E}{4\pi k}\right) = \rho \qquad [90]$$

En el sistema Giorgi se introducen dos vectores que indicaremos con letras redondas $\mathcal{E}$ y $\mathcal{D}$ llamados respectivamente intensidad eléctrica e inducción eléctrica y que están vinculados al vector E definido en [51] por las expresiones:

$$\mathcal{E} = E, \qquad [91]$$

$$\mathcal{D} = \frac{E}{4\pi k}. \qquad [92]$$

El cociente de los dos vectores $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ da una constante que se designa con el nombre de *constante dieléctrica del vacío* ε_0:

$$\varepsilon_0 = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi k}. \qquad [93]$$

De este modo la ecuación [90] se escribe:

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \rho \qquad [94]$$

donde no aparece ninguna constante.

En cuanto al significado del vector $\mathcal{D}$ consideremos que colocamos, en cierta región, normalmente a las líneas del campo, una pequeña chapa metálica de superficie igual a S. Si el número de líneas que intercepta la chapa es N, la intensidad del campo eléctrico en esa región será N/S y, de acuerdo a [88], llamando q_i a la carga inducida en la chapa, se tendrá:

$$\frac{N}{S} = E = 4\pi k \frac{q_i}{S} \qquad [95]$$

Pero si q_i / S es la densidad de carga superfical σ_i inducida, por lo cual

$$\frac{E}{4\pi k} = \mathcal{D} = \sigma_i. \qquad [96]$$

De aquí el nombre *inducción* dado al vector $\mathcal{D}$.

En cuanto al campo magnético en el sistema Giorgi, la ley de Lorentz [50] se escribe así:

$$\vec{F} = q\,(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \wedge \vec{\mathcal{B}}). \qquad [97]$$

Se ve entonces que este vector $\mathcal{B}$ al cual, siguiendo a Sommerfeld (véase § 13) se llama *intensidad* de campo magnético, es el H del sistema simétrico dividido por la velocidad de la luz:

$$\mathcal{B} = \frac{H}{c}. \qquad [98]$$

Además, la expresión de la fuerza magnetomotriz que en el sistema simétrico está dada por [79] puede transformarse pasando las constantes al primer miembro y así resulta:

$$\int_O \left(\frac{c}{4\pi k} H\right) ds = I \qquad [99]$$

La parte, dentro del integrando, encerrada entre paréntesis, se identifica en el sistema Giorgi con un vector sobre cuya designación no existe unánime acuerdo, aún cuando los que son consecuentes con la llamada correspondencia de Sommerfeld (véase § 13) llaman inducción magnética o excitación magnética, pero no intensidad de campo.

Nosotros designaremos a este vector con la letra $\mathcal{H}$.

$$\mathcal{H} = \frac{c}{4\pi k} H \qquad [100]$$

De este modo la [99] se escribe

$$\int_O \mathcal{H}\, ds = I, \qquad [101]$$

donde análogamente a lo que ocurría con [94] no aparece ninguna constante. De acuerdo a [100] y a [80] el campo $\mathcal{H}$ en el interior de un solenoide toroidal es:

$$\mathcal{H} = \frac{nI}{l}, \qquad [102]$$

que se mide en "ampere-vuelta por metro".

El cociente de los vectores $\mathscr{B}$ y $\mathscr{H}$ da una constante que se denomina permeabilidad magnética del vacío: μ_0 De acuerdo a [98] y [100] se tendrá:

$$\frac{\mathscr{B}}{\mathscr{H}} = \mu_0 = 4\pi\frac{k}{c^2} \qquad [103]$$

Si de [93] y [103], se hallan las constantes k y c del sistema simétrico se tiene:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad [104]$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \qquad [105]$$

Estas fórmulas vinculan las constantes de los dos sistemas de unidades: el simétrico y el de Giorgi. En el primero las dos constantes que deben "arrastrarse" en los desarrollos son: una la constante k de la ley de Coulomb cuyo significado es inmediato, en tanto que la otra, velocidad de propagación de la luz en el vacío, figura ya hasta en las fórmulas de la mecánica, no obstante lo cual en el sistema Giorgi, la misma no aparece explícitamente para nada. La razón de este "ocultamiento" es puramente histórica. El sistema Giorgi no es más que el sistema electromagnético de Maxwell hecho *M K S* en lugar de C G S y transportado, por decirlo así, a la escala del coulomb. En el sistema electromagnético de Maxwell el coeficiente de la [81] se hace igual a la unidad sin dimensiones y como la constante k de la [81] es la constante de la ley de Coulomb del magnetismo que, también se supone igual a la unidad, resulta que la c desaparece como si se siguiera este proceso:

$$F = \frac{1}{c^2}\frac{2I_1I_2}{R}l = \frac{2\left(\frac{I_1}{c}\right)\left(\frac{I_2}{c}\right)}{R}l = \frac{2I_1^*I_2^*}{R}l.$$

La I estrellada es la que ha "devorado" a la constante c y por ello no es extraño que el cociente entre ambas intensidades sea:

$$\frac{I}{I^*} = c. \qquad [106]$$

No negamos que la aparición de la velocidad de la luz así, por el cociente entre dos cantidades que expresan una misma cosa, pero que se han medido de distinto modo, es algo espectacular y que convendría conservar para despertar nuestro asombro, si el mismo no surgiera espontáneamente, y sin artificiosidad ninguna, del estudio ya de por sí bastante complicado, de los fenómenos naturales. Y esto mismo decimos cuando esa c queda expresada como se indica en [105] en función de dos *"constantes eléctricas del espacio vacío"*, lo que es quizá una reminiscencia de la etapa ya superada, en que se buscaba "explicar" la propagación de la luz a partir de las propiedades físicas de un éter mecánico.

En cuanto a las unidades en que se miden los *cuatro* vectores del campo electromagnético en el sistema Giorgi son:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Unidad de } \mathscr{E} \text{ ([51], [62], [91])} & \text{———} & 1\,\dfrac{\text{newton}}{\text{coul}}, \\ \text{,, \quad ,, } \mathscr{D} \text{ ([92], [96])} & \text{———} & 1\,\dfrac{\text{coul}}{\text{m}^2}, \\ \text{,, \quad ,, } \mathscr{B} \text{ ([97])} & \text{———} & 1\,\dfrac{\text{newton}}{\text{coul. m/s}}, \\ \text{,, \quad ,, } \mathscr{H} \text{ ([101])} & \text{———} & 1\,\dfrac{\text{ampere}}{\text{m}}. \end{array}\right\} \quad [107]$$

9. La ley de inducción de Faraday en el sistema simétrico. — En la ley de Lorentz [50] está contenida la ley fundamental de la inducción de Faraday, que puede ser deducida de aquélla muy fácilmente. Imaginemos para ello un conductor rectilíneo de longitud l que suponemos se hace mover con velocidad v, en un campo magnético uniforme de intensidad H, de tal modo que el vector v sea perpendicular a las líneas de fuerza del campo y al propio conductor. De este modo la fuerza de Lorentz actuará en la dirección del conductor sobre las partículas electrizadas del interior del mismo. Las cargas positivas tienden a acumularse en uno de los extremos del conductor y las negativas en el otro, con lo cual se originará un campo eléctrico E que tendrá la dirección de la varilla móvil y que actuará sobre cada carga q del interior del conductor con una fuerza Eq igual y opuesta a la fuerza de Lorentz desde el momento que ambas se equilibran:

$$E\,q = -q\,\frac{v}{c}\,H\,. \qquad [108]$$

Si l es la longitud del conductor, el producto $E\,l$ nos dará la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla y esta diferencia de potencial, en circuito abierto, tiene que ser igual a la fuerza electromotriz inducida E_i de un circuito cerrado al que perteneciera la varilla móvil.

Teniendo en cuenta la convención de los signos de Maxwell, multiplicando ambos miembros de [108] por l y reemplazando v por $\frac{dx}{dt}$ resulta, por ser $Hldx = HdS = d\varphi$ la variación del flujo magnético:

$$E_i = -\frac{1}{c}\,\frac{d\varphi}{dt}\,. \qquad [109]$$

En esta expresión el flujo φ se mide en *lorentz* $\times$ m^2 el tiempo en segundos, la velocidad constante c en m/seg, y la fuerza electromotriz inducida en volt. Es ahora conveniente definir lo que llamaremos *flujo dinámico* ϕ, igual al flujo dividido por la constante c:

$$\phi = \frac{\varphi}{c}\,. \qquad [110]$$

De este modo [109] se convierte en:

$$E_i = -\frac{d\phi}{dt}\,. \qquad [111]$$

En relatividad se utiliza como coordenada temporal la variable $u = ct$. La [109] expresa entonces que la fuerza electromotriz inducida es igual a la derivada del flujo φ con respecto a u.

Para poder expresar lo mismo pero refiriéndonos al tiempo común medido en segundos es que se introduce el flujo ϕ.

La definición [110], por ser explícita, no tiene nada de común con el proceso a que hicimos referencia en el párrafo anterior.

El flujo dinámico ϕ es el que se utiliza en la práctica y su unidad recibe el nombre de *weber*.

Si suponemos que c es igual a $3 \times 10^8\ m/s$ el flujo ϕ es de 1 weber si un campo de 3×10^8 lorentz atraviesa normalmente la superficie de 1 m^2. Por la [111] se ve que:

$$[\text{weber}] = [\text{volt} \times \text{seg}]. \qquad [112]$$

Esta unidad de flujo dinámico coincide con la unidad de flujo en el sistema Giorgi del vector $\mathscr{B}$ pues se tiene, de acuerdo a [98]:

$$\phi = \mathscr{B} S = \frac{H}{c} S = \frac{\varphi}{c}. \qquad [113]$$

Los coeficientes de autoindicción o de inducción mútua se definen en la forma corriente. Así por ejemplo el flujo que atraviesa un circuito por el cual circula la intensidad I es:

$$\phi = L I, \qquad [114]$$

donde L es el coeficiente de autoinducción que se expresa en *henry* si ϕ está dado en weber e I en ampere.

10. Relación entre las unidades de los diferentes sistemas. — El sistema Giorgi y los sistemas de Maxwell, electroestático y electromagnético, son asimétricos y trataremos aquí de encontrar las relaciones entre las diferentes unidades de esos sistemas.

Como el sistema Giorgi es tetradimensional y los de Maxwell son tridimensionales, las dimensiones de la misma magnitud varían al pasar de uno al otro. Para evitar esta complicación transformaremos los sistemas de Maxwell en tetradimensionales pero conservando las unidades mecánicas del sistema $C\,G\,S$. Las unidades eléctricas o magnéticas del sistema electroestático de Maxwell serán designadas con los nombres que tienen las unidades prácticas de la misma magnitud, pero precedidas del prefijo *"stat"*. Así por ejemplo en lugar de decir: "la unidad electroestática $C\,G\,S$ de diferencia de potencial", diremos: "statvolt", designación que, dicho sea de paso, está bastante en uso. Para las unidades del sistema electromagnético $C\,G\,S$ se utiliza el prefijo *"ab"* para hacer referencia a un supuesto carácter absoluto de las mismas, pero como esas unidades no son ni más ni menos absolutas que las otras, nosotros utilizaremos el prefijo *"mag"* y hablaremos así de magcoulomb, si queremos referirnos a la unidad electromagnética $C\,G\,S$ de carga eléctrica. Advirtamos también, que cuando en las relaciones que establezcamos aparezca el número 3 multiplicado por alguna potencia de 10, si se quiere mayor exactitud habrá que efectuar el reemplazo

$$3 \rightarrow 2{,}99793$$

y

$$9 \rightarrow 8{,}98758$$

de acuerdo a [61].

Las unidades fundamentales de los sistemas Giorgi y Maxwell I y II (considerando a ambos como tetradimensionales) son:

	Longitud	Masa	Tiempo	Carga
Giorgi	m	kg	s	Q
Maxwell I	cm	g	s	Q *
Maxwell II	cm	g	s	Q **

Q	designa	coulomb
Q *	,,	statcoulomb
Q **	,,	magcoulomb

Se tienen las siguientes relaciones:

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{cm}} = 10^2 ; \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{g}} = 10^3 ; \frac{Q}{Q^*} = 3 \times 10^9 ; \frac{Q^{**}}{Q} = 10.$$

Además convendrá tener presente para hacer más rápidamente el cambio de un sistema al otro las relaciones entre las unidades de fuerza y de energía entre los sistemas *M K S* y *C G S*:

$$\frac{\text{newton}}{\text{dina}} = 10^5 \ ; \ \frac{\text{joule}}{\text{erg}} = 10^7 .$$

Las "constants del vacío" serán designadas así:

	Constante dieléctrica	Permeabilidad magnética
Giorgi	ε_0	μ_0
Maxwell I	ε_0'	μ_0'
Maxwell II	ε_0''	μ_0''

En todos los casos se escribirán las ecuaciones considerando que se trata de sistemas "racionalizados" (el coeficiente 4π figura como denominador en la expresión de la ley de Coulomb).

Comencemos por calcular las constantes del vacío en los sistemas de Maxwell. Se tiene por [104], [58] y [59]:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k = 9 \times 10^9 \left[\frac{\text{newton} \times \text{m}^2}{\text{Q}^2}\right] \qquad [115]$$

En consecuencia:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0'} = 9 \times 10^9 \left[\frac{10^5\ \text{dina} \times 10^4\ \text{cm}^2}{9 \times 10^{18}\ \text{Q}^{*2}}\right] = 1 \left[\frac{\text{dina} \times \text{cm}^2}{\text{Q}^{*2}}\right], \qquad [116]$$

y

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0''} = 9 \times 10^9 \left[\frac{10^5\ \text{dina} \times 10^4\ \text{cm}^2}{10^{-2}\ \text{Q}^{**2}}\right] = 9 \times 10^{20} \left[\frac{\text{dina} \times \text{cm}^2}{\text{Q}^{**2}}\right]. \qquad [117]$$

Por [103] y [86] se tiene:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{k}{c^2} = 10^{-7} \left[\frac{\text{newton} \times \text{s}^2}{\text{Q}^2}\right]. \qquad [118]$$

De aquí se obtiene:

$$\frac{\mu'_0}{4\pi} = 10^{-7} \left[\frac{10^5\ \text{dina} \times \text{s}^2}{9 \times 10^{18}\ \text{Q}^{*2}}\right] = \frac{1}{9} \times 10^{-20} \left[\frac{\text{dina} \times \text{s}^2}{\text{Q}^{*2}}\right], \qquad [119]$$

$$\frac{\mu''_0}{4\pi} = 10^{-7} \left[\frac{10^5\ \text{dina} \times \text{s}^2}{10^{-2}\ \text{Q}^{**2}}\right] = 1 \left[\frac{\text{dina} \times \text{s}^2}{\text{Q}^{**2}}\right]. \qquad [120]$$

De [115] y [118] se obtiene dividiendo miembro a miembro y extrayendo la raíz cuadrada:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \qquad [121]$$

Procediendo análogamente con [116] y [119]; y [117] y [120], resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_0 \mu'_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon''_0 \mu''_0}} = 3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}. \qquad [122]$$

En realidad lo que se ha calculado son las constantes dimensionadas de la ley de Coulomb de electroestática y de la ley, derivada de la de Ampere, referente a la atracción entre dos corrientes rectilíneas indefinidas y paralelas ([48] y [54] con [93] y [103]):

$$F = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q\,q'}{r^2} \quad ; \quad F = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{2\,I_1\,I_2}{R}\,l. \qquad [123]$$

Estas leyes, en el sistema electroestático de Maxwell, [116] y [119] se escribirían:

$$F = 1\,.\,\frac{q\,q'}{r^2} \;;\; F = \frac{1}{9 \times 10^{20}}\,.\,\frac{2\,I_1\,I_2}{R}\,.\,l, \qquad [124]$$

y en el electromagnético [117] y [120]:

$$F = 9 \times 10^{20}\,\frac{q\,q'}{r^2} \;;\; F = 1\,.\,\frac{2\,I_1\,I_2}{R}\,.\,l. \qquad [125]$$

Los coeficientes numéricos que figuran en [124] y [125], aun los iguales a la unidad, tienen dimensiones y por eso las cuatro fórmulas son coherentes. Pero en los sistemas de Maxwell se hacía el coeficiente unitario igual a la unidad sin dimensiones con lo cual resultaba:

$$F = \frac{q\,q'}{r^2} \quad ; \quad F = \frac{1}{c^2}\,\frac{2\,I_1\,I_2}{R}\,.\,l \qquad [126]$$

Sistema electroestático original de Maxwell

$$F = c^2\,\frac{q\,q'}{r^2} \quad ; \qquad F = \frac{2\,I_1\,I_2}{R}\,.\,l. \qquad [127]$$

Sistema electromagnético original de Maxwell

Claro está que las dos fórmulas de [126] son coherentes entre sí pues la constante c tiene las dimensiones de una velocidad, al igual que las dos de [127]. Pero evidentemente la q de [126] no puede ser igual a la q de [127] pues en ambas la fuerza se mide en dinas y la distancia en centímetros. Lo mismo cabe decir de las I que figuran en [126] y [127]. La confusión se origina porque se usaban simultáneamente los dos sistemas. Y se usaban los dos sistemas porque es muy difícil medir con precisión la constante c, y en la época de Maxwell, su determinación, por métodos exclusivamente eléctricos, sólo permitía conocer su valor con una aproximación grosera. De ahí que en las medidas electroestáticas se utilizara la primera de [126] y en las electromagnéticas la segunda de [127]. Entonces, si se han de utilizar simultáneamente esos dos sistemas indiquemos con un subíndice S las magnitudes que se determinan electroestáticamente y con subíndice m las medidas electromagnéticamente. Las fórmulas anteriores se convierten entonces en las siguientes (reemplazando I_1 por I e I_2 por I'):

$$F = \frac{q_s q'_s}{r^2} \; ; \quad F = \frac{1}{c^2} \frac{2 I_s I'_s}{R} \cdot l \qquad [128]$$

$$F = c^2 \frac{q_m q'_m}{r^2} \; ; \quad F = \frac{2 I_m I'_m}{R} \cdot l \qquad [129]$$

Salta ahora a la vista que debe ser:

$$\begin{array}{ll} q_s = c\, q_m \, , & \dfrac{I_s}{c} = I_m \\ \dfrac{q_s}{q_m} = c \, , & \dfrac{I_s}{I_m} = c, \end{array} \qquad [130]$$

Tratándose de *la misma* cantidad de electricidad o de *la misma* intensidad, medida en uno u otro sistema. Así, por ejemplo q_s se puede obtener calculando la capacidad de un condensador y midiendo la diferencia de potencial entre sus armaduras con un electrómetro absoluto y q_m observando la desviación que produce en un galvanómetro balístico la descarga de aquel mismo condensador.

Dejemos ahora los sistemas de Maxwell originales, tridimensionales, y no coherentes entre sí, y hallemos las relaciones *numéricas* entre las unidades de diferentes magnitudes en los sistemas Giorgi, Maxwell I y Maxwell II.

a) *Intensidad*

$$I = \frac{q}{t} \; ; \quad 1 \text{ ampere} = \frac{1 \text{ coul}}{1 \text{ s}} = 1 \frac{\text{Q}}{\text{s}} = 1 \frac{3 \times 10^9 \text{ Q}^*}{\text{s}}$$

$$= 3 \times 10^9 \text{ statamp} = 1 \; 10^{-1} \frac{\text{Q}^{**}}{\text{s}} = \frac{1}{10} \text{mag amp.}$$

b) *Diferencia de potencial*

$$V = \frac{\text{Trabajo}}{\text{carga}};\ 1 \text{ volt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1\ Q} = \frac{10^7 \text{ erg}}{3 \times 10^9\ Q^*}$$

$$= \frac{1}{3 \times 10^2} \text{ statvolt} = \frac{10^7 \text{ erg}}{10^{-1}\ Q^{**}} = 10^8 \text{ magvolt}$$

c) *Capacidad*

$$C = \frac{\text{carga}}{\text{potencial}};\ 1 \text{ farad} = 1\ \frac{Q}{\text{volt}} = 1\ \frac{3 \times 10^9\ Q^*}{\frac{1}{3 \times 10^2} \text{ stvolt}}$$

$$= 9 \times 10^{11} \text{ statfarad} = 1\ \frac{10^{-1}\ Q^{**}}{10^8 \text{ magvolt}} = 10^{-9} \text{ magfarad}$$

Consideramos que estos ejemplos son suficientes para mostrar lo fácil que es pasar de un sistema al otro después de haber hecho tetradimensionales los sistemas de Maxwell No obstante, como las unidades anteriores son comunes al sistema simétrico *M K S Q* que se corresponde naturalmente, por decirlo así, con el sistema de Gauss, daremos todavía aquí y a continuación las unidades de los campos, o mejor dicho las unidades del campo, porque el campo electromagnétivo es uno solo.

Debemos tratar aquí de las cuatro unidades del campo en el sistema Giorgi (intensidad eléctrica, intensidad magnética, inducción eléctrica e inducción magnética) por la sencilla razón de que en nuestro sistema simétrico existe una sola magnitud, intensidad de campo, común a las componentes eléctricas y magnéticas y en consecuencia, también, una sola unidad.

d) *Intensidad de campo eléctrico*

$$\mathscr{E} = \frac{\text{fuerza}}{\text{carga}};\ 1\ \text{U}\ \mathscr{E} = 1\ \frac{\text{newton}}{Q} = \frac{10^5 \text{ dina}}{3 \times 10^9\ Q^*} =$$

$$= \frac{1}{3 \times 10^4} \text{ stat U } \mathscr{E} = \frac{10^5 \text{ dina}}{10^{-1}\ Q^{**}} = 10^6 \text{ mag U } \mathscr{E}\,.$$

Esta magnitud y en consecuencia la unidad, coincide con la del sistema simétrico a la cual proponíamos dar el nombre de *lorentz* si se trataba del campo magnético. Para la unidad de intensidad de campo eléctrico no es tan indispensable un nombre especial, pues, por ser la intensidad del campo, igual, con signo opuesto, al gradiente del potencial, puede ponerse

$$1\ \mathrm{U}\ \mathscr{E} = 1\ \frac{\mathrm{newton}}{\mathrm{Q}} = 1\ \frac{\mathrm{newton} \times \mathrm{m}}{\mathrm{Q} \times \mathrm{m}} = 1\ \frac{\mathrm{Volt}}{\mathrm{m}}$$

y hablar en consecuencia, para designar la intensidad de un campo eléctrico, de "tantos volt por metro". Y se tienen las relaciones:

$$1\ \frac{\mathrm{volt}}{\mathrm{m}} = \frac{1}{3 \times 10^4}\ \frac{\mathrm{statvolt}}{\mathrm{cm}} = 10^6\ \frac{\mathrm{magvolt}}{\mathrm{cm}}.$$

e) *Inducción eléctrica.* — De acuerdo a [107] se tienen para la unidad de medida el vector $\mathscr{D}$.

$$1\ \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{m}^2} = \frac{3 \times 10^9\ \mathrm{Q}^*}{10^4\ \mathrm{cm}^2} = 3 \times 10^5\ \frac{\mathrm{Q}^*}{\mathrm{cm}^2} = \frac{10^{-1}\ \mathrm{Q}^{**}}{10^4\ \mathrm{cm}^2} = 10^{-5}\ \frac{\mathrm{Q}^{**}}{\mathrm{cm}^2}.$$

f) *Intensidad de campo magnético actuando sobre corrientes o cargas móviles.* — Posiblemente llame la atención esta calificación de "actuando sobre corrientes" cuya razón es que al actuar sobre polos magnéticos de un imán permanente la intensidad pasa a ser otra cosa. Se trata del "problema" acerca de la designación apropiada de los vectores $\mathscr{B}$ y $\mathscr{H}$ de la correspondencia de Maxwell o la de Sommerfeld que ya trataremos detenidamente más adelante.

Por [107] se tiene:

$$1\ \mathrm{U}\ \mathscr{B} = 1\ \frac{\mathrm{newton} \times \mathrm{s}}{\mathrm{Q} \times \mathrm{m}} = \frac{10^5\ \mathrm{dina} \times \mathrm{s}}{3 \times 10^9\ \mathrm{Q}^* \times 10^2\ \mathrm{cm}} =$$

$$\frac{1}{3 \times 10^6}\ \mathrm{stat}\ \ \mathrm{U}\ \mathscr{B} = \frac{10^5\ \mathrm{dina} \times \mathrm{s}}{10^{-1}\ \mathrm{Q}^{**} \times 10^2\ \mathrm{cm}} = 10^4\ \mathrm{mag}\ \mathrm{U}\ \mathscr{B}$$

Obsérvese que esta "mag U $\mathscr{B}$" es la unidad cegesimal electromagnética de intensidad de campo magnético, es decir el *gauss*. En consecuencia la unidad Giorgi de intensidad de campo magnético, para la cual se ha propuesto el nombre de *tesla*, es igual a 10000 gauss.

g) *Excitación magnética* ($\mathscr{H}$) .. — Por [107] se tiene:

$$1\ \mathrm{U}\ \mathscr{H} = 1\ \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{s\,m}} = \frac{3 \times 10^9\ \mathrm{Q}^*}{\mathrm{s} \times 10^2\ \mathrm{cm}} = 3 \times 10^7\ \mathrm{stat}\ \mathrm{U}\ \mathscr{H} =$$

$$= \frac{10^{-1}\ \mathrm{Q}^{**}}{\mathrm{s} \times 10^2\ \mathrm{cm}} = 10^{-3}\ \mathrm{mag}\ \mathrm{U}\ \mathscr{H}.$$

h) *Constante dieléctrica.* — Por más que hasta ahora hemos hablado, al referirnos a los sistemas asimétricos como el sistema Giorgi, de la "constante dieléctrica del vacío", en dichos sistemas se acostumbra considerar a la constante dieléctrica de cualquier sustancia dimensionada y se la define (en las sustancias isótropas y homogéneas) como el cociente entre los vectores $\mathscr{D}$ y $\mathscr{E}$

$$\varepsilon' = \frac{\mathscr{D}}{\mathscr{E}}. \qquad [131]$$

Escribimos la letra ε con acento (έ) al designar a la constante dieléctrica dimensionada que resulta de la definición [131] con el objeto de reservarnos la letra ε sin acento para expresar la constante dieléctrica definida como cociente entre la capacidad de un condensador entre cuyas armaduras se encuentra la sustancia y la capacidad del mismo condensador cuando entre aquéllas existe el vacío.

De esta manera resulta:

$$\varepsilon' = \varepsilon_0\, \varepsilon. \qquad [132]$$

La unidad de έ de acuerdo a los apartados d) y e) de este párrafo y la definición [131] es:

$$1\ \mathrm{U}\ \varepsilon' = 1\,\frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{newton} \times \mathrm{m}^2} = 1 \cdot \frac{9 \times 10^{18}\ \mathrm{Q}^*}{10^5\ \mathrm{dina} \times 10^4\ \mathrm{cm}^2} =$$

$$= 9 \times 10^9\ \mathrm{stat}\ \varepsilon' = \frac{10^{-2}\ \mathrm{Q}^{**2}}{10^5\ \mathrm{dina} \times 10^4\ \mathrm{cm}^2} = 10^{-11}\ \mathrm{mag}\ \varepsilon'.$$

i) *Permeabilidad magnética.* — Análogamente y también para sustancias isótropas y homogéneas y no ferromagnéticas, que requieren un tratamiento especial, se tiene:

$$\mu' = \frac{\mathscr{B}}{\mathscr{H}} \qquad [133]$$

$$\mu' = \mu_0\, \mu \qquad [134]$$

donde μ es la permeabilidad magnética numérica, adimensionada, que puede definirse, por ejemplo, como cociente entre los flujos de inducción en el interior de un toroide con y sin substancia en su interior. Se tiene para unidad de μ' de acuerdo a la definición [133] y apartados f) y g):

$$1 \text{ U } \mu' = 1 \frac{\text{newton} \times s^2}{Q^2} = \frac{10^5 \text{ dina} \times s^2}{9 \times 10^{18} \text{ Q}^{*2}} = \frac{1}{9 \times 10^{13}} \text{ stat U } \mu' =$$

$$= \frac{10^5 \text{ dina} \times s^2}{10^{-2} \text{ Q}^{**2}} = 10^7 \text{ mag U } \mu'.$$

La hipotética sustancia cuya constante dieléctrica ϵ fuera igual a la unidad en el sistema Giorgi, y la constante magnética μ también igual a la unidad en el mismo sistema, se caracterizaría porque en ella las ondas electromagnéticas, se propagarían con la velocidad de 1 m/s.

Piénsese, por otra parte, en que el valor y las dimensiones de μ_0 se fijan arbitrariamente para definir la unidad de intensidad de corriente, lo cual es perfectamente lícito, pero al referir luego la permeabilidad magnética de cualquier substancia a aquel μ_0 se da de μ *también una definición relativa*, pero no al espacio vacío, sino a una sustancia en la cual la luz se propagaría con la velocidad conque camina un hombre, al hacerlo despaciosamente.

11. Acción entre corrientes e imanes a través de un medio material. — En todo lo que precede, hemos considerado que el medio que rodeaba las cargas eléctricas o los imanes fuera el espacio vacío. Como nosotros buscamos sólo establecer un sistema de medidas y unidades lo más cómodo y "económico" posible, procuramos no entrar a considerar las complicaciones que se presentan cuando se sustituye el espacio vacío por el seno de la materia.

La estructura de un sistema de medición no incide sobre la "cosa en sí" y no creemos que sobre su constitución pueda influir en el caso particular de un sistema de medidas eléctricas y magnéticas, el hecho de ser el campo magnético solenoidal o no, en los dominios atómicos o subatómicos.

Pero deseamos destacar aquí esta circunstancia paradojal: los partidarios del sistema Giorgi, destacan que el campo magnético está originado *siempre* por corrientes eléctricas o sea por cargas en movimiento, aun en el caso de un imán permanente cuyo campo estaría causado por las corrientes de Ampère. Si esto se hiciera notar para indicar que "en esencia" el campo magnético y el eléctrico son una misma cosa o componentes de una misma cosa, y que en consecuencia deben medirse con la misma unidad, podría entenderse la argumentación, pero ésta se dirige, más que nada, a prescindir, en las definiciones básicas de los imanes permanentes. Las razones de este querer prescindir de los imanes, tan fáciles de manejar y tan difíciles de entender, deben ser varias, pero con seguridad, entre ellas, se encuentra ésta: si $\mathscr{B}$ es el vector apropiado para ser designado con el nombre de INTENSIDAD del campo magnético cuando se trata de la fuerza que actúa entre corrientes, para el caso de la acción entre polos de imanes permanentes, el nombre de *intensidad* conviene más al vector. $\mathscr{H}$ Si se supone que se tienen dos solenoides y se mide la fuerza que actúa entre los mismos, se encuentra que, en idénticas condiciones de intensidad de corriente y distancia, la fuerza se hace μ veces mayor que en el vacío si los solenoides se sumergen en un medio indefinido de permeabilidad μ, en tanto que, si se trata de imanes permanentes la fuerza se hace μ veces menor.

Por esta razón la ley de Lorentz en un medio de permeabilidad μ (μ es un número) debe escribirse, en lo que se refiere a la fuerza conque el campo magnético H actúa sobre la carga móvil q:

$$F = q \frac{\vec{v}}{c} \wedge (\mu \vec{H}). \qquad [135]$$

De aquí que la fuerza con que se atraen dos corrientes paralelas e indefinidas inmersas en un medio de permeabilidad μ sea, en lugar de [81]:

$$F = \mu \frac{\mathrm{k}}{c^2} \frac{2 I_1 I_2}{R} l. \qquad [136]$$

De aquí que, para que se pueda seguir escribiendo la ley de Faraday como lo está en [109] o [111] conviene definir el flujo magnético φ así:

$$\varphi = \mu H S, \qquad [137]$$

y el flujo dinámico

$$\phi = \frac{\varphi}{c} = \frac{\mu H S}{c}. \qquad [138]$$

Resulta entonces cómodo definir un vector B tal que:

$$B = \mu H, \qquad [139]$$

pero obsérvese, estamos en el sistema simétrico, que μ es un número (definido aquí como cociente entre dos fuerzas) y en consecuencia B tiene idénticas dimensiones físicas que H.

Pero si pasamos a imanes permanentes, la fuerza se hace μ veces menor y la ley de Coulomb para masas magnéticas m y m' sumergidas en un medio indefinido de permeabilidad, μ sería:

$$F = \frac{k}{\mu} \; \frac{m\,m'}{r^2}, \qquad [140]$$

donde, como sabemos, m y m' tienen las dimensiones de una carga eléctrica. Se comprende fácilmente el porqué de la disminución de la fuerza que actúa entre los polos de imanes permanentes, cuando los mismos se encuentran en un medio paramagnético, si se piensa en que los imanes moleculares del medio, se adosarán contra los polos de los imanes permanentes, presentando contra la superficie de éstos, polos de nombres opuestos, originando así, una disminución aparente de la masa magnética del imán *. En cambio, en un solenoide sin núcleo, la sustancia del medio penetra en el interior del mismo, lo que produce un aumento de la masa magnética efectiva. De aquí que la acción entre un imán y una corriente no depende del medio. El campo H, originado en un punto P, situado a la distancia r de la masa magnética m es, de acuerdo a [140]:

$$H = \frac{F}{m'} = \frac{k}{\mu} \; \frac{m}{r^2}, \qquad [141]$$

y si en este punto P se encuentra un conductor de longitud dl perpendicular a H y por el que circula una corriente de intensidad I, la fuerza que actuará sobre dicho elemento de conductor será [72]:

$$\text{fuerza} = \mu \frac{H}{c} I\,dl = \frac{\mu}{c}\left(\frac{k}{\mu}\;\frac{m}{r^2}\right) I\,dl$$

$$\text{fuerza} = \frac{1}{c}\;\frac{k\,m}{r^2}\; I\,dl, \qquad [142]$$

fuerza que debe ser igual a la que el elemento de corriente ejerce sobre la masa m y que *no depende del medio*.

Es de aquí que surge la ventaja de definir un vector que

* En realidad la [140] sólo es del todo válida si los imanes están imantados hasta la saturación y son muy largos.

sea independiente del medio y que resulta útil para describir la acción entre corrientes e imanes. Justamente la [79] es la que nos da esa definición, aunque falta agregar, como veremos, al segundo miembro de la misma, la contribución de las llamadas corrientes de desplazamiento.

Tratemos ahora de escribir la [140] en el sistema Giorgi poniendo la constante k en función de μ_0. Como se recordará se tiene:

$$\frac{k}{c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

con lo cual se tendría, sustituyendo este valor en [140]:

$$F = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi\mu} \frac{m m'}{r^2}.$$

Pero en el sistema Giorgi no puede figurar la constante c explícitamente por lo cual conviene definir el polo magnético p así:

$$p = mc.$$

Las dimensiones del polo magnético así definido son las de una carga (m) por una velocidad (c). La expresión de la ley de Coulomb del magnetismo sería entonces:

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi\mu} \frac{p p'}{r^2}. \qquad [143]$$

Teniendo en cuenta la definición de p, se encuentra que las dimensiones de F/p' que es la intensidad de campo, son las de una fuerza dividida por carga por velocidad, o sea son las del vector $\mathscr{B} = H/c$:

$$\left[\frac{F}{p'}\right] = \left[\frac{\mu_0}{4\pi\mu} \frac{p}{r^2}\right] = \left[\frac{\text{fuerza}}{\text{carga} \times \text{velocidad}}\right] = [\mathscr{B}]. \qquad [144]$$

Pero ocurre que si los polos considerados se encuentran en el vacío [143] se convierte en

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p p'}{r^2}, \qquad [145]$$

y esto sugeriría que en un medio de permeabilidad μ' la expresión de la fuerza tendría que ser (μ' es la permeabilidad dimensionada: $\mu' = \mu \mu_0$):

$$F = \frac{\mu'}{4 \pi} \frac{p p'}{r^2} . \qquad [146]$$

Por esta circunstancia en muchos tratados que emplean el sistema Giorgi y que adoptan para el vector que nosotros indicamos con $\mathscr{B}$ (B redonda) el nombre de intensidad, aparece la permeabilidad dimensionada como factor y no como divisor, como si la fuerza entre dos polos magnéticos, aumentara en lugar de disminuir al estar ellos sumergidos en un medio paramagnético. Claro está que el dislocamiento de la permeabilidad que aparece en [143] con μ_0 arriba y μ abajo es desagradable. Esto se puede arreglar pero este arreglo tiene un precio: tiene que cambiarse la definición del polo magnético y con la nueva ya no será más $\mathscr{B}$ el vector intensidad sino $\mathscr{H}$. Brevemente podemos mostrar lo que ocurre del modo siguiente: multipliquemos numerador y denominador de la constante que figura en el segundo miembro de [143] por μ_0 con lo cual se obtiene:

$$F = \frac{\mu_o^2}{4 \pi \mu \mu_o} \frac{p p'}{r^2} , \qquad [147]$$

donde $\mu \mu_0 = \mu'$, es la permeabilidad del medio, la permeabilidad dimensionada. Si definimos ahora un nuevo polo magnético p^* tal que

$$p^* = \mu_0 p = \mu_0 mc \qquad [148]$$

la [147] se convierte en

$$F = \frac{1}{4 \pi \mu'} \frac{p^* p^{*'}}{r^2} . \qquad [149]$$

Tenemos así la expresión de la ley de Coulomb del magnetismo que está de acuerdo con la experiencia, como lo estaba también la [143] pues lo único que se ha cambiado es la definición de lo que debe entenderse por "masa magnética". Claro está que en la deducción de [149] aparecen los momentos magnéticos de las corrientes de Ampère del interior de cada uno de los imanes y el cálculo debe hacerse suponiendo que el medio donde se encuentran esas corrientes es el vacío. Pero estas deducciones clásicas han perdido ya su significado frente al magnetismo de origen cuántico de las partículas elementales.

Volviendo a la [149] y dada la definición del polo de [148] se encuentra que el producto de ese polo por lo que antes era "excitación" magnética $\mathcal{H}$ nos da fuerza:

$$p^* \ \mathcal{H} = \text{fuerza} = (m\mu_0 c)\ \mathcal{H} \qquad [150]$$

así como también

$$p^* \ \mathcal{B} = \text{fuerza} = (mc)\ \mathcal{B} \qquad [150]$$

y

$$m\,H = \text{fuerza}. \qquad [152]$$

Vemos que cualquiera de estos tres vectores

$$\mathcal{H}, \quad \mathcal{B}, \quad H,$$

puede ser denominado intensidad de campo magnético. Definiendo nuevas masas magnéticas tendríamos también nuevas intensidades de campos y, al llegar aquí, para no perdernos en la búsqueda de la *verdadera intensidad*, aconsejo que se relean los párrafos de Planck transcriptos al comienzo de este trabajo.

12. Las ecuaciones del campo en el sistema simétrico. — Sea un sistema inercial de coordenadas cartesianas, derecho, x_1, x_2, x_3, al cual agregamos como cuarta coordenada el tiempo t, o mejor el producto del tiempo por la velocidad de la luz c. Se tiene entonces:

$$x_0 = u = ct; \ \ x_1 = x; \ x_2 = y; \ x_3 = z; \qquad [153]$$

y consideraremos un tensor contravariante y antisimétrico de segundo orden F^{hi}.

Dado el carácter antisimétrico del tensor considerado será $F^{hi} = - F^{ih}$, y en consecuencia, para $h = i$, las componentes del tensor serán nulas. Los subíndices h y i toman los valores 0,1,2,3. En consecuencia se tendrá:

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0. \qquad [154]$$

Las otras componentes se identifican con las componentes del campo eléctrico E y del campo magnético H de la manera siguiente:

$$F^{01} = E_x \; ; \quad F^{02} = Ey \; ; \quad F^{03} = Ez \; ;$$
$$F^{10} = -E_x \; : \quad F^{20} = -Ey \; ; \quad F^{10} = -Ez \; ;$$
$$F^{12} = Hz \; ; \quad F^{23} = H_x \; ; \quad F^{31} = Hy \; ;$$
$$F^{21} = -Hz \; ; \quad F^{32} = -H_x \; ; \quad F^{13} = -Hy \; ;$$

o como se ve en el esquema

$$\mathrm{F}^{hi} = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_0 & 0 & E_x & E_y & E_z \\ \hline x_1 & -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ \hline x_2 & -E_y & H_z & 0 & H_x \\ \hline x_3 & -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{array} \right. \qquad [155]$$

Los signos de las componentes de H se encuentran, en una terna derecha, por la regla del tirabuzón. Formemos ahora el cuadrivector densidad de corriente:

$$j^h = \rho \frac{V^h}{c} \qquad [156]$$

donde ϱ es la densidad volumétrica de carga eléctrica, c la velocidad de la luz en el vacío y V^h el cuadrivector velocidad conque se mueven las cargas de densidad ϱ:

$$V^0 = c \; ; \quad V^1 = v_x ; \quad V^2 = v_y ; \quad V^3 = v_z . \qquad [157]$$

De este modo las componentes de la densidad de corriente según los cuatro ejes u, x, y, z, son:

$$j^0 = \rho \; ; \quad j^1 = \rho \frac{v_x}{c} \; ; \; j^2 = \rho \frac{v_y}{c} \; ; \; j^3 = \rho \frac{v_z}{c} . \qquad [158]$$

Finalmente, para simplificar la escritura y "racionalizar" las ecuaciones que habrán de resultar, introduzcamos una constante K vinculada a la constante k, que hemos empleado hasta ahora, por la igualdad

$$K = 4 \pi k. \qquad [159]$$

Con esta notación el primer grupo de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz se escribe en la simplísima forma siguiente:

$$\frac{\partial F^{hi}}{\partial x_i} = K j^h. \qquad [160]$$

El primer miembro representa una suma respecto al índice repetido i, y como el índice h toma los cuatro valores 0, 1, 2, 3; la [160] contiene cuatro ecuaciones que escribiremos a continuación explícitamente. Si $h = 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial F^{00}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x_3} = K j^0. \qquad [161]$$

Teniendo en cuenta los valores del cuadro [155], la designación de las coordenadas de [153], así como la [158] se tiene:

$$\frac{\partial Ex}{\partial x} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{\partial Ez}{\partial z} = K\rho, \qquad [162]$$

cuyo primer miembro es igual a la divergencia del vector E.

Para el valor $h = 1$, la [160] se escribe:

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x_3} = K\rho \frac{v_x}{c},$$

donde se omitió el escribir el término que contiene a F^{11} por ser nulo. La ecuación anterior teniendo en cuenta los valores del cuadro es:

$$-\frac{\partial Ex}{\partial u} \frac{\partial Hz}{\partial y} - \frac{\partial Hy}{\partial z} = \frac{K}{c} \rho v_x$$

o sea:

$$\frac{\partial Hz}{\partial y} - \frac{\partial Hy}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial Ex}{\partial t} + \frac{K}{c} \rho v_x \qquad [163]$$

y análogamente para $h = 2$ y $h = 3$, resulta (lo que puede obtenerse por permutación cíclica de las letras):

$$\frac{\partial Hx}{\partial z} - \frac{\partial Hz}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial Ey}{\partial t} + \frac{K}{c}\rho\, v_y; \quad [164]$$

$$\frac{\partial Hy}{\partial x} - \frac{\partial Hx}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial Ez}{\partial t} + \frac{K}{c}\rho\, v_z. \quad [165]$$

Escribiendo la [162] y estas tres últimas en forma vectorial obtenemos las ecuaciones

$$\operatorname{div} E = K\rho \quad [166]$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{K}{c}\rho V \quad [167]$$

que constituyen el primer grupo de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz, siendo ϱV la densidad i de la corriente *.

Para escribir el segundo grupo de las ecuaciones de Maxwell comencemos por formar el tensor covariante asociado al F^{hi}. Se forma así:

$$F_{hi} = g_{h\alpha}\, g_{i\beta}\, F^{\alpha\beta}, \quad [168]$$

donde los g_{hi} son los coeficientes de la forma cuadrática fundamental,

$$ds^2 = du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

y que se escriben en el cuadro siguiente:

$$g_{hi} = \begin{cases} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{cases} \quad [169]$$

con lo cual aplicando la [168] se obtiene:

$$F_{oo} = g_{o\alpha}\, g_{o\beta}\, F^{\alpha\beta},$$

donde el segundo miembro representa una suma respecto de los índices α y β. Por los valores dados en [169] los coefi-

* En general, si ϱ_1 es la densidad de las cargas positivas que se mueven con velocidad V_1 y ϱ_2 las de las cargas negativas cuya velocidad es V_2, se tendrá: $i = \varrho_1 V_1 - \varrho_2 V_2$.

cientes g sólo son diferentes de cero si los dos subíndices son iguales y, en consecuencia α tendrá que ser cero y β también.

Pero entonces el único sumando que habría que tomar en consideración es:

$$F_{00} = g_{00}\, g_{00}\, F^{00} = (+1)\,(+1)\,(0) = 0,$$

pues F^{00} es cero. Del mismo modo se obtiene que

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

Las restantes componentes se calculan fácilmente:

$$F_{01} = g_{00}\, g_{11}\, E^{01} = (+1)\,(-1)\,(E_x) = -E_x$$

$$F_{12} = g_{11}\, g_{22}\, F^{12} = (-1)\,(-1)\,(H_z) = H_z \text{ etc.}$$

obteniéndose los valores del cuadro

$$F_{hi} = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_0 & 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ \hline x_1 & E_x & 0 & H_z & -H_y \\ \hline x_2 & E_y & -H_z & 0 & H_x \\ \hline x_3 & E_z & H_y & -H_x & 0 \end{array} \right. \qquad [170]$$

Con esto el segundo grupo de ecuaciones se escribe:

$$\frac{\partial F_{hi}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_h} + \frac{\partial F_{jh}}{\partial x_i} = 0 \qquad [171]$$

Si en esta ecuación se consideran dos índices iguales, formando por ejemplo la terna (001) o la (113), etcétera, se obtiene una identidad, en tanto que los términos de la ecuación cuando los tres índices son iguales son todos nulos. Por lo tanto sólo resultan ecuaciones diferentes si las ternas de índices adquieren los valores

012; 013; 023; 123.

Comencemos por escribir la ecuación que resulta de [171] con esta última terna de valores:

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial z} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x} + \frac{\partial F_{31}}{\partial y} = 0,$$

que por el cuadro [170] se convierte, cambiando el orden de los términos, en la ecuación

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \qquad [172]$$

Las otras tres ternas dan origen a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}: \end{aligned} \qquad [173]$$

que en forma vectorial se escriben:

$$\operatorname{div} H = 0: \qquad [174]$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}; \qquad [175]$$

que constituyen el segundo grupo de ecuaciones de Maxwell.

Veamos ahora cómo se transforman los vectores E y H cuando se pasa de un sistema inercial S a otro S'. Naturalmente para que S' sea inercial deberá trasladarse respecto de S con movimiento uniforme, conservándose constante la velocidad relativa v entre ambos sistemas. Eligiendo la dirección de los ejes de los dos sistemas S y S' de tal modo que los ejes x y x' tengan la dirección de la velocidad v y considerando además que los ejes de ambos sistemas coincidan cuando los relojes situados junto a los orígenes de S y S', pertenecientes a cada uno de los dos sistemas considerados, indican el instante cero, las fórmulas que permiten el pasaje de uno a otro sistema son las célebres ecuaciones de Lorentz que escribimos a continuación:

$$x' = \frac{x - u \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}\ ; \quad u' = \frac{u - x \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}\ ;$$
$$y' = y\ ;\ z' = z\ ;\ u = c\,t\ ;\ u' = c\,t'\ ;\ \operatorname{sen} \alpha = \frac{v}{c}\,. \qquad [176]$$

El ángulo α no es un simple auxiliar matemático, ya que el mismo tiene una clara significación física, pues es el ángulo de aberración principal entre los dos sistemas y es también igual al ángulo que forman entre sí los ejes de los tiempos cuando se representan geométricamente las fórmulas de Lorentz en coordenadas oblicuas utilizando una única escala para ambos sistemas *.

(En la representación de Minkowski con tiempo real corresponde a cada sistema geométrico de coordenadas una unidad de longitud diferente.)

En la forma habitual [176] se escriben:

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ ;\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ ,\ y' = y\ ;\ z' = z\,. \qquad [177]$$

Para hallar las fórmulas de transformación de los vectores E y H al pasar del sistema S al S' basta con indicar que un tensor contravariante se transforma así:

$$F^{hi'} = \frac{\partial x'_h}{\partial x_r}\,\frac{\partial x'_i}{\partial x_s}\,F^{rs}\,. \qquad [178]$$

* Con respecto a la representación geométrica a que aquí se alude, señalaremos que en el año 1955 el profesor norteamericano HENRI AMAR publicó en *American Journal of Physics* una memoria titulada *"New Geometric Representation of the Lorentz Transformation"*, 23, 8, 487 que coincidía exactamente con la representación nuestra, publicada casi ocho años antes, pero, el profesor AMAR reconoció muy gentilmente esta circunstancia pues escribió a los editores de *Am. Jour. of Phys.* (25, 5, 326, 1957) diciendo: "I regret my unfamiliarity with South American Literature and wish to acknowledge the priority of Professor Loedel's work.

Se tiene entonces para la primera componente:

$$F^{01'} = E'_{x'} = \frac{\partial x'_0}{\partial x_r} \frac{\partial x'_1}{\partial x_s} F^{rs} =$$

$$= \frac{\partial u'}{\partial x_0} \frac{\partial x'}{\partial x_1} F^{01} + \frac{\partial u'}{\partial x_1} \frac{\partial x'}{\partial x_0} F^{10},$$

pues u' depende sólo de x_0 que es u y de x_1 que es simplemente x así como también x' y, en consecuencia, la doble suma del segundo miembro [178] se reduce a sólo dos sumandos. Teniendo en cuenta ahora las [176] y los valores del cuadro [155] se obtiene:

$$E'_{x'} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right) E_x + (-\operatorname{tg}\alpha)\ (-\operatorname{tg}\alpha)\ (-E_x)$$

o sea

$$E'_{x'} = E_x$$

Análogamente:

$$F^{02'} = E'_{y'} = \frac{\partial x'_0}{\partial x_r} \frac{\partial x'_2}{\partial x_s} F^{rs} =$$

$$= \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial y'}{\partial y} F^{02} + \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} F^{12} =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)(1)\ E_y + (-\operatorname{tg}\alpha)\ (1)\ H_z$$

o sea

$$E'_{y'} = \frac{E_y - H_z \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

En resumen, efectuando el mismo cálculo para las 6 componentes diferentes del tensor antisimétrico F^{hi}, o sea de las seis componentes del llamado *hexavector* del campo, se obtiene:

$$E'_{x'} = E_x ;$$

$$E'_{y'} = \frac{E_y - H_z \text{ sen } \alpha}{\cos \alpha} : \qquad [179]$$

$$E'_{z'} = \frac{E_z + H_y \text{ sen } \alpha}{\cos \alpha} ;$$

$$H'_{x'} = H_x ;$$

$$H'_{y'} = \frac{H_y + E_z \text{ sen } \alpha}{\cos \alpha} , \qquad [180]$$

$$H'_{z'} = \frac{H_z - E_y \text{ sen } \alpha}{\cos \alpha} .$$

Estas ecuaciones pueden representarse geométricamente de una manera muy simple utilizando la representación geo-

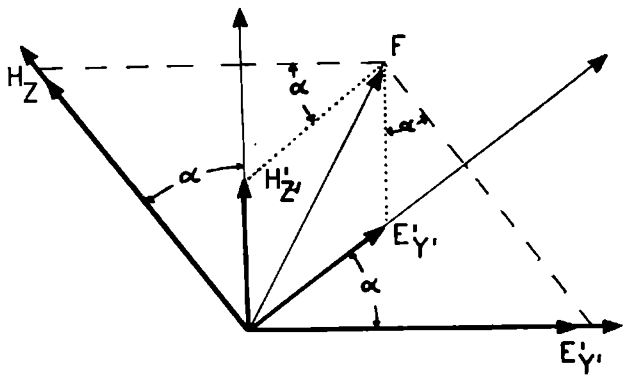

FIGURA 1

métrica de las fórmulas de Lorentz a que hacíamos referencia líneas más arriba. Las dos primeras de cada uno de los grupos no ofrecen ninguna dificultad por lo cual nos ocuparemos sólo de las cuatro restantes. Se ve que la segunda de [179] y la tercera de [180] se transforman igual que las x y las u de [176] (fig. 1) en tanto que la tercera del primer grupo con la segunda de [180] corresponde a la transformación inversa

$$x = \frac{x' + u' \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \; ; \; u = \frac{u' + x' \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \; ; \qquad [181]$$

y se han representado en la fig. 2. Observemos que el v/c que figura en la [50] de la fórmula de Lorentz no es más que el seno del ángulo α entre el sistema del observador y el de la carga.

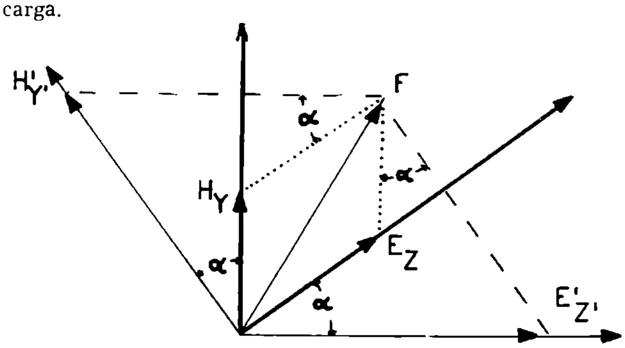

FIGURA 2

13. LAS ECUACIONES DEL CAMPO EN EL SISTEMA GIORGI. — Si dividimos por K la [156] y multiplicamos por c/K la [167] obtenemos:

$$\operatorname{div}\left(\frac{E}{K}\right) = \rho \qquad [182]$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{c}{K} H\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E}{K}\right) + \rho V \qquad [183]$$

Introduciendo ahora los vectores:

$$\frac{E}{K} = \mathscr{D} \; ; \; \frac{c}{K} H = \mathscr{H} ; \; \rho V = i ; \qquad [184]$$

se tiene

$$\operatorname{div} \mathscr{D} = \rho \qquad [185]$$

$$\operatorname{rot} \mathscr{H} = \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t} + i \qquad [186]$$

que es el primer grupo de ecuaciones de Maxwell escrito en la forma en que es habitual cuando se utiliza el sistema Giorgi racionalizado.

El segundo grupo se obtiene con sólo introducir en [175] y [174] el vector

$$\frac{H}{c} = \mathscr{B} \, ; \qquad E = \mathscr{E} \, ; \tag{187}$$

con lo cual aquéllas se escriben:

$$\mathrm{div} \, \mathscr{B} = 0 \, ; \tag{188}$$

$$\mathrm{rot} \, \mathscr{E} = - \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t} \, . \tag{189}$$

De aquí y de algunas consideraciones dimensionales surge la llamada correspondencia de Sommerfeld según la cual, de los dos vectores magnéticos $\mathscr{H}$ y $\mathscr{B}$ es el $\mathscr{B}$ el que debe ser denominado *vector intensidad* pues *"Según la teoría de la relatividad se sabe desde hace tiempo que los dos vectores $\mathscr{B}$ y $\mathscr{E}$ forman juntos el hexavector intensidad de campo así como $\mathscr{H}$ y $\mathscr{D}$ constituyen el hexavector cantidad de campo"* (Feldquantität).

Es increíble que la proposición que se acaba de leer, y que hemos transcripto textualmente, haya sido suscripta por el gran Sommerfeld, y más increíble aún, que la misma haya sido repetida en una u otra forma por prestigiosos autores de todas partes. Estúdiese con cuidado la forma tensorial o relativista de las ecuaciones de Maxwell en cualquier tratado, aun en el mismo tratado de Sommerfeld y se verá que de ellas no se deduce de ningún modo que los vectores $\mathscr{B}$ y $\mathscr{E}$ constituyan o sean parte del mismo hexavector. La ecuación [160] como ecuación puramente matemática, está totalmente desprovista de sentido físico. Recién adquiere un sentido físico, es decir, un contenido, cuando se identifican las componentes del tensor F^{hi} y del j^h con entidades físicas. El *"relleno"* del cuadro [155], agregando además lo que representan *físicamente* los símbolos que allí se introduzcan, podrán dar contenido a la ecuación [160] y un sentido físico, esto es: que pueda ser verificada experimentalmente. Pero el cuadro [155] puede ser llenado de muchos modos. Si se reemplazan simplemente las E del sistema simétrico por las $\mathscr{E}$ del sistema Giorgi (de acuerdo a [187] y se escribe junto a cada una de las "H", como factor, el número 1, pero como cociente de la constante c por c, o sea:

$$H = \frac{c}{c} H = c \left(\frac{H}{c}\right) = c \mathscr{B}, \qquad [190]$$

entonces sí, pertenecen o constituyen el mismo hexavector los vectores

$$\mathscr{E} \text{ y } c \mathscr{B} . \qquad [191]$$

Obsérvese que es el vector $c\mathscr{B}$ y *no* el vector $\mathscr{B}$. Pero no hay ningún decreto que impida *rellenar* el cuadro [155] multiplicando previamente a las componentes E por K/K y a las H, como antes, por c/c:

$$\frac{K}{K} E = \frac{K}{K} \mathscr{E} = K \left(\frac{\mathscr{E}}{K}\right) = K \mathscr{D}$$

$$\frac{c}{c} \mathrm{H} = c \left(\frac{H}{c}\right) = c \mathscr{B} \qquad [192]$$

y nos encontramos conque de este modo pertenecerían al mismo hexavector los vectores $\mathscr{B}$ y $\mathscr{D}$. Sí, ya sé: tendría que decir los vectores $K\mathscr{D}$ y $c\mathscr{B}$, sin omitir las constantes y eso mismo es lo que se hace cuando se afirma que "de acuerdo a la teoría de la relatividad .... los vectores $\mathscr{B}$ y $\mathscr{E}$ .... y los $\mathscr{H}$ y $\mathscr{D}$ ...."

En resumidas cuentas: para obtener las fórmulas de transformación en el sistema Giorgi de los vectores $\mathscr{B}$ y $\mathscr{E}$ deben hacerse en las [179] y [180] las sustituciones:

$$E \rightarrow \mathscr{E}$$

$$H \rightarrow c \frac{H}{c} = c \mathscr{B} \qquad [193]$$

obteniéndose:

$$\mathscr{E}'_{x'} = \mathscr{E}_x ; \qquad \mathscr{B}'_{x'} = \mathscr{B}_x ;$$

$$\mathscr{E}'_{y'} = \frac{\mathscr{E}_y - c \mathscr{B}_z \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}; \quad [194] \qquad \mathscr{B}'_{y'} = \frac{\mathscr{B}_y + \frac{1}{c} \mathscr{E}_z \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} ; \quad [195]$$

$$\mathscr{E}'_{z'} = \frac{\mathscr{E}_z + c \mathscr{B}_y \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}; \qquad \mathscr{B}'_{z'} = \frac{\mathscr{B}_z - \frac{1}{c} \mathscr{E}_y \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

En cambio para obtener las fórmulas de transformación del otro par de vectores "del otro hexavector", constituído por $\mathcal{D}$ y $\mathcal{H}$ deben efectuarse las sustituciones:

$$E = \frac{K}{K}\mathcal{E} = K\left(\frac{\mathcal{E}}{K}\right) = K\mathcal{D}; \quad E \to K\mathcal{D} \tag{196}$$

$$H = \frac{K}{c}\,\frac{c}{K}\,H = \frac{K}{c}\left(\frac{c}{K}H\right) = \frac{K}{c}\mathcal{H}; \quad H \to \frac{K}{c}\mathcal{H}$$

resultando:

$$\mathcal{D}'_{x'} = \mathcal{D}_x; \qquad \mathcal{D}'_{y'} = \frac{\mathcal{D}_y - \frac{1}{c}\mathcal{H}_z \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \mathcal{D}'_{z'} = \frac{\mathcal{D}_z + \frac{1}{c}\mathcal{H}_y \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}; \tag{197}$$

$$\mathcal{H}'_{x'} = \mathcal{H}_x; \qquad \mathcal{H}'_{y'} = \frac{\mathcal{H}_y + c\,\mathcal{D}_z \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \mathcal{H}'_{z'} = \frac{\mathcal{H}_z - c\,\mathcal{D}_y \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}. \tag{198}$$

De este modo las [194] y [195] expresarían las fórmulas de transformación de un hexavector y las [197] y [198] del otro hexavector, cuando en verdad se pasa de una a la otra multiplicando por un factor constante. Pero si en [179] y [180] se efectúa la sustitución:

$$E \to K\mathcal{D}$$

y [199]

$$H \to c\,\mathcal{B}$$

resulta

$$\mathcal{D}'_{x'} = \mathcal{D}_x; \qquad \mathcal{D}'_{y'} = \frac{\mathcal{D}_y - \frac{c}{K}\mathcal{B}_z \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \mathcal{D}'_{z'} = \frac{\mathcal{D}_z + \frac{c}{K}\mathcal{B}_y \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}; \tag{200}$$

$$\mathcal{B}'_{x'} = \mathcal{B}_x; \qquad \mathcal{B}'_{y'} = \frac{\mathcal{B}_y + \frac{K}{c}\mathcal{D}_z \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \mathcal{B}'_{z'} = \frac{\mathcal{B}_z - \frac{K}{c}\mathcal{D}_y \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}. \tag{201}$$

De acuerdo a estas fórmulas aparecen perteneciendo al mismo hexavector los vectores $\mathscr{D}$ y $\mathscr{B}$, lo que estaría de acuerdo con la clásica correspondencia de Maxwell y en cuanto al otro grupo de fórmulas del "hexavector" constituído por E y H se obtienen con las sustituciones

$$E \rightarrow \mathscr{E}$$

$$H = \frac{c}{K}\left(\frac{c}{H}\right) = \frac{c}{K}\,\mathscr{H}; \quad H \rightarrow \frac{c}{K}\,\mathscr{H} \qquad [202]$$

resultando

$$\mathscr{E}'_{x'} = \mathscr{E}_x; \qquad \mathscr{H}'_{x'} = \mathscr{H}_x;$$

$$\mathscr{E}'_{y'} = \frac{\mathscr{E}_y - \frac{c}{K}\,\mathscr{H}_z \text{ sen } \alpha}{\cos \alpha}; \quad [203] \quad \mathscr{H}'_{y'} = \frac{\mathscr{H}_y + \frac{K}{c}\,\mathscr{E}_z \text{ sen } \alpha}{\cos \alpha}; \quad [204]$$

$$\mathscr{E}'_{z'} = \frac{\mathscr{E}_z + \frac{c}{K}\,\mathscr{H}_y \text{ sen } \alpha}{\cos \alpha}; \quad \mathscr{H}'_{z'} = \frac{\mathscr{H}_z' - \frac{K}{c}\,\mathscr{E}_y \text{ sen } \alpha.}{\cos \alpha}$$

De modo pues que *no tiene sentido decir* que de acuerdo a la teoría de la relatividad los vectores $\mathscr{E}$ y $\mathscr{B}$ pertenecen a un mismo hexavector que *es* el hexavector *intensidad de campo*. Lo que correspondería decir sería: En la teoría de la relatividad se ha acostumbrado a asociar como vectores intensidad a los vectores $\mathscr{E}$ y $\mathscr{B}$ pero como los cuatro vectores que se introducen $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{D}$ y $\mathscr{H}$ difieren unos de otros sólo por factores constantes podrían también considerarse unidos, formando un mismo par, $\mathscr{E}$ con $\mathscr{H}$ y $\mathscr{D}$ con $\mathscr{B}$.

Debe observarse además que la velocidad de la luz, la constante c, es extraña al sistema Giorgi y, no obstante, se la hace aparecer cuando se escriben las ecuaciones del campo en forma tensorial. Podría seguirse ocultando esa *c* escribiendo en su lugar la inversa de la raíz cuadrada del producto de ε_0 por μ_0. Pero ésto sería demasiado artificioso.

Si algún lector, llevado por la fuerza de la costumbre, opinara todavía que son más naturales las fórmulas en que aparecen en el mismo par $\mathscr{E}$ y $\mathscr{B}$ [194] y [195] que aquellas otras en que se encuentran juntas $\mathscr{D}$ y $\mathscr{B}$ por el hecho de que en estas últimas aparece la constante $\frac{K}{c}$, que no tiene un sentido tan inmediato como *c*, podría decírsele que esa constante representa la "resistencia eléctrica del vacío a las ondas electromagnéticas'

$$\frac{K}{c} = \frac{4\pi k}{1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 4\pi k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}},$$

cuyo valor es, aproximadamente, igual a:

$$4\pi\frac{k}{c} \cong 4\pi \times 30 \text{ ohm.}$$

Con respecto a las dimensiones de los cuatro vectores $\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{H}$ observa Sommerfeld, que se tiene (véase [107]):

$$\mathcal{E} = \frac{\text{fuerza}}{\text{carga}}; \qquad \mathcal{B} = \frac{\text{fuerza}}{\text{carga} \times \text{velocidad}};$$
$$\mathcal{D} = \frac{\text{carga}}{\text{superficie}}; \qquad \mathcal{H} = \frac{\text{carga} \times \text{velocidad}}{\text{superficie}}; \qquad [205]$$

por lo cual, si lo que es carga en el campo eléctrico se sustituye por carga $\times$ velocidad en el campo magnético se ve que $\mathcal{B}$ desempeña el mismo papel que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ se comporta, en cambio, como $\mathcal{D}$.

Resulta de aquí que:

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{E}} = \frac{\text{carga}^2}{\text{fuerza} \times \text{superficie}}; \qquad [206]$$

$$\mu = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H}} = \frac{\text{fuerza} \times \text{superficie}}{\text{carga}^2 \times \text{velocidad}^2}; \qquad [207]$$

y entonces ε se corresponde, no con μ, sino con la inversa de μ y de ahí que proponga que se escriba la relación entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{H}$ no como se lo hace habitualmente

$$\mathcal{B} = \bar{\mu}\,\mathcal{H} \text{ sino } \mathcal{H} = \bar{\mu}'\,\mathcal{B}$$

donde, naturalmente, $\overline{\mu'}$ sería la inversa de $\bar{\mu}$. A este especular sobre las *"verdaderas dimensiones"* es a lo que sin duda aludía PLANCK cuando escribió los párrafos que hemos escrito al comienzo del presente trabajo. Lo cierto es que los cuatro vectores están vinculados entre sí dimensionalmente por las relaciones

$$\mathcal{E} = K\,\mathcal{D} = \frac{K}{c}\,\mathcal{H} = c\,\mathcal{B}, \qquad [208]$$

y siendo los coeficientes constantes me parece que se acaban todas las discusiones si se hace

$$\mathcal{E} = E\,;\ K\,\mathcal{D} = D\,;\ \frac{K}{c}\,\mathcal{H} = H\,;\ c\,\mathcal{B} = B \qquad [209]$$

donde E, D, H y B tienen idénticas dimensiones físicas.

Obsérvese, además, que para escribir las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial en el sistema simétrico, se requiere utilizar un único tensor, que es el hexavector del campo, en tanto que, en el sistema Giorgi, se necesitan para llegar a lo mismo, dos tensores, cuyas componentes no son las de los vectores que se utilizarán finalmente, puesto que están formadas, en algunos casos, por productos de aquellos ($\mathcal{B}$) por una constante dimensionada (c) extraña al formalismo del sistema.

En consecuencia, si lo que se busca es utilizar un sistema de medidas que permita la descripción de los fenómenos naturales de la manera más simple posible, consideramos que, sin duda alguna, habrá que preferirse el sistema simétrico *M K S Q*, que aquí proponemos, al sistema Giorgi, actualmente en uso, y que es también un sistema *M K S Q*.

Como un último ejemplo para probar lo que aquí decimos, mencionaremos el caso de una onda electromagnética plana que se propaga en el espacio vacío. Las amplitudes de los vectores eléctricos $\mathcal{E}_0$ y $\mathcal{D}_0$ y la de los vectores magnéticos $\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{H}_0$ (¡cuatro vectores en total, todos dimensionalmente distintos!) guardan entre sí las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_0| &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\,|\mathcal{B}_0| \\ |\mathcal{D}_0| &= \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,|\mathcal{H}_0| \end{aligned} \qquad [210]$$

$$\mathcal{D}_0 = \varepsilon_0\,\mathcal{E}_0 \quad ; \quad \mathcal{B}_0 = \mu_0\,\mathcal{H}_0$$

en tanto que en el sistema simétrico se tiene simplemente

$$|\mathbf{E}_0| = |\mathbf{H}_0|. \qquad [211]$$

En cuanto a la energía irradiada por unidad de superficie y por unidad de tiempo, la misma se expresa, en el sistema simétrico, así:

$$P = \frac{c}{K} E \wedge H, \qquad [212]$$

que es la forma que adquiere el vector de *Poynting*, P, en dicho sistema. En el sistema Giorgi, en cambio, el vector de Poynting se traduce por la expresión:

$$P = \mathscr{E} \wedge \mathscr{H}, \qquad [213]$$

que es en apariencia más simple que la [212], pero que deja de lado por completo a los otros dos vectores $\mathscr{D}$ y $\mathscr{B}$, por lo cual uno cae en la tentación de pensar que en la onda electromagnética *tetramórfica* del sistema Giorgi, *o falta energía o sobran vectores.*

14. La cuestión de la racionalización. — Para evitar el "diluvio de los 4π" de que hablaba Heavside (§ 4) se escribe la ley de Coulomb de modo que aparezca el factor 4π en el denominador de la misma. En el sistema electroestático $C\,G\,S$ tradicional, o en el sistema de Gauss, la ley de Coulomb de electroestática se escribe suponiendo que la constante de proporcionalidad de la misma sea la unidad sin dimensiones:

$$F = \frac{q\,q'}{r^2}, \qquad [214]$$

y de aquí, la clásica definición de la unidad electroestática de carga como aquélla que repele a otra igual, colocada a un centímetro de distancia (en el vacío) con la fuerza de una dina. Pero de la [214] surge, por el teorema de Gauss, que el número de líneas de fuerza que salen de una carga q es igual a $4\pi q$ y que la divergencia del vector E sea igual a $4\pi\rho$. Si en cambio se escribe la [214] así:

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{q^*\,q^{*\prime}}{r^2} \qquad [215]$$

el número N de líneas de fuerza que salen de la carga q^* *será*

$$N = q^* \qquad [216]$$

y el teorema de la divergencia se expresaría así:

$$div\, E^* = \varrho^*$$

donde hemos indicado a las magnitudes del sistema "racionalizado" que surge de [215] con una estrella. En él las unidades de carga, de intensidad de campo, de densidad, etcétera, son otras. De acuerdo a [215] la unidad electroestática CGS de carga eléctrica sería aquella carga que repele a otra igual a ella, colocada a la distancia de 1 cm con una fuerza igual a $\frac{1}{4\pi}$ dinas. De modo pues que la unidad de carga en el sistema electroestático CGS racionalizado es $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ de la unidad electroestática CGS tradicional. Así por ejemplo se sabe que la carga eléctrica del electrón es:

$$e = 4{,}8 \times 10^{-10}.\ \text{u. E.S. de carga CGS (sistema tradicional)}$$

o bien

$$e = 4{,}8 \times 10^{-10} \times \sqrt{4\pi}\ \text{u.E.S. de carga CGS (sistema racionalizado)}$$

Con respecto a este sistema A. SOMMERFELD, en su artículo del año 1935, ya varias veces citado, expresa: "En lo que se refiere a la cuestión de las unidades yo me siento hasta cierto punto culpable: En la redacción del tomo V de la *Mathematischen Enzyklopädie*, H. A. Lorentz y yo habíamos acordado en un sistema especial de 3 unidades, el cual se ha vuelto predominante en la física teórica donde se le designa, debido a la autoridad de Lorentz, con el nombre de unidades lorentzianas". Y continúa: "Después de haber propagado este sistema durante más de 30 largos años en mis lecciones y trabajos, he llegado recién en mis últimas lecciones sobre electrodinámica, a utilizar un sistema general de 4 unidades".

Explica a continuación los sistemas constituídos como el Giorgi, por tres unidades mecánicas fundamentales y una cuarta unidad eléctrica. Pero en estos sistemas de 4 unidades fundamentales queda abierta la cuestión de la racionalización, lo mismo que en los sistemas de 3. Advirtamos desde ya que la palabra *racionalización* es interpretada por algunos autores, en un sentido que induciría a pensar que los sistemas racionalizados, son más *razonables* que los no racionalizados. Pero no es así. La palabra racionalización se empleó para designar la supresión de los *coeficientes numéricos irracionales* que figuraban en las ecuaciones de Maxwell. El sentido del término "racionalizar" tiene aquí un mero significado aritmético como cuando se dice: "racionalicemos el denominador de esa expresión" y reemplazamos, por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ por } \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad [217]$$

con lo cual el cálculo numérico se hace más fácil.

De modo pues que los sistemas de unidades racionalizados son aquellos en los cuales se hace desaparecer de algunas fórmulas el factor *irracional* (en sentido aritmético) 4π.

Así, por ejemplo, la energía del campo eléctrico por unidad de volumen en función de la intensidad del campo E y de la constante dieléctrica ε está dada, en el sistema electroestático tradicional, por la expresión

$$U = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \qquad [218]$$

en tanto que si el sistema está racionalizado resulta:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon E^{*2} \qquad [219]$$

Si ambos sistemas son CGS la energía U se expresará en los dos en erg por centímetro cúbico, por lo cual parece obvio que la única forma de llevar a cabo la racionalización es cambiando la unidad de medida de la intensidad del campo eléctrico de modo que sea:

$$\frac{E^2}{4\pi} = E^{*2} \; ; \quad E^* = \frac{E}{\sqrt{4\pi}}, \qquad [220]$$

y aparecen entonces las llamadas unidades lorentzianas. Pero también es posible pasar de [218] a [219] conservando el mismo valor para la intensidad del campo pero variando el de la constante dieléctrica:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon^* E^2$$

Ya nos ocuparemos con detenimiento, líneas más abajo, de este modo de racionalización, particularizándonos entonces con los sistemas Giorgi. Pero aquí queremos destacar que la racionalización podría llevarse a cabo también conservando la forma de la [214] y sin alterar ni la unidad de fuerza, ni la unidad de carga ni ninguna otra unidad eléctrica. A primera vista parece que estamos afirmando un imposible y, no obstante, ello puede lograrse de una manera sumamente fácil. Basta con adoptar como unidad de área el área de una superficie esférica de radio igual a la unidad de longitud, de manera tal que

$$S^* = r^2 \qquad [221]$$

sea la expresión válida para calcular la superficie de una esfera, hallándose además el volumen de la misma V^*, por la expresión

$$V^* = \frac{1}{3} r^3, \qquad [222]$$

con lo cual la unidad de volumen sería el triple del volumen de una esfera de radio unitario.

De esta manera es fácil probar que partiendo de [214] se llega a [216], a [217], y a una expresión racionalizada de la energía tal como la [220] pero que indicaríamos así:

$$U^* = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \qquad [223]$$

para indicar que el "peso" de la racionalización ha recaído aquí sobre la energía que es 4π veces mayor que la calculada con [218] por la sencilla razón de ser ahora la *unidad de volumen* del sistema racionalizado 4π veces mayor.

Claro está que nadie ha intentado llevar a cabo la racionalización de un sistema de medidas eléctrico cambiando la unidad de área y la unidad de volumen con las cuales estamos ya demasiado familiarizados. A Lorentz y a Sommerfeld les pareció, en cambio, que cambiar *todas* las unidades eléctricas y magnéticas era el precio razonable que se debía pagar para sacar el factor 4π de las ecuaciones de Maxwell. No obstante, como lo reconoce el mismo Sommerfeld, ya se había determinado demasiado bien la carga del electrón, utilizando la unidad *C G S* tradicional de carga, por lo cual se aconsejaba, tímidamente, que se siguiera expresando su valor en la antigua unidad y que se indicara simplemente, sin efectuar la operación, que, para obtener el valor en unidades lorentzianas se debía multiplicar por $\sqrt{4\pi}$.

En el sistema Giorgi la racionalización se lleva a cabo variando los valores de las dos constantes del vacío, la unidad de medida del vector $\mathscr{H}$ (exitación magnética) y la unidad de medida del vector $\mathscr{D}$. Al variar las constantes del vacío varían la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética de todas las substancias.

Llamando ε_0 y μ_0 a los valores de las constantes del vacío en el sistema Giorgi racionalizado y ε_0' y μ_0' a los valores de las mismas constantes en el sistema Giorgi no racionalizado, las relaciones entre las mismas y las constantes k y c del sistema simétrico son:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon'_0}; \qquad [224]$$

$$\frac{k}{c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} = \mu_0'. \qquad [225]$$

Si por comodidad introducimos en el sistema simétrico los vectores D y B vinculados a E y H por las expresiones

$$D = \varepsilon E; \qquad B = \mu H; \qquad [226]$$

donde ε y μ son constantes numéricas no dimensionadas, iguales al número uno para el vacío *, e indicamos con $\mathscr{E}, \mathscr{D}, \mathscr{B}$, y $\mathscr{H}$ los cuatro vectores del sistema Giorgi racionalizado y con $\mathscr{E}', \mathscr{D}', \mathscr{B}'$ y $\mathscr{H}'$ los del sistema Giorgi no racionalizado se tiene:

$$E = \mathscr{E} = \mathscr{E}' \qquad [227]$$

$$\frac{D}{4\pi k} = \mathscr{D} = \frac{\mathscr{D}'}{4\pi} \qquad [228]$$

$$\frac{c}{4\pi k} H = \mathscr{H} = \frac{\mathscr{H}'}{4\pi} \qquad [229]$$

$$\frac{1}{c} B = \mathscr{B} = \mathscr{B}' \qquad [230]$$

Con estas ecuaciones a la vista el pasaje de uno a otro sistema se efectúa sin dificultad alguna. Así, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell que en el sistema simétrico se escriben:

* Si la sustancia que se considera no es isótropa ε y μ se convierten en tensores de componentes numéricas.

$$\text{(S.S)} \quad \begin{aligned} &\operatorname{div} D = 4\pi k \rho\,; && \operatorname{div} B = o \\ &\operatorname{rot} H = \frac{4\pi k}{c}\, i + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}\,; && \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned} \qquad [231]$$

se convierten en el sistema Giorgi racionalizado en las siguientes:

$$\text{(G R)} \quad \begin{aligned} &\operatorname{div} \mathscr{D} = \rho\,; && \operatorname{div} \mathscr{B} = 0\,; \\ &\operatorname{rot} \mathscr{H} = i + \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t}\,; && \operatorname{rot} \mathscr{E} = -\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t}\,; \end{aligned} \qquad [232]$$

y en el no racionalizado en:

$$\text{(G. no R)} \quad \begin{aligned} &\operatorname{div} \mathscr{D}' = 4\pi\rho\,; && \operatorname{div} \mathscr{B}' = 0\,; \\ &\operatorname{rot} \mathscr{H}' = 4\pi i + \frac{\partial \mathscr{D}'}{\partial t}\,; && \operatorname{rot} \mathscr{E}' = -\frac{\partial \mathscr{B}'}{\partial t} \end{aligned} \qquad [233]$$

En cuanto a la fuerza de Lorentz que en el sistema simétrico se escribe

$$\text{(S. S)} \qquad F = q\left(E + \frac{v}{c} \wedge B\right); \qquad [234]$$

en ambos sistemas Giorgi adquiere la forma:

$$\begin{pmatrix} \text{G R} \\ \text{G no R} \end{pmatrix} \qquad F = q\left(\mathscr{E} + v \wedge \mathscr{B}\right). \qquad [235]$$

En el sistema Giorgi racionalizado la ley integral del campo magnético es:

$$\text{(G. R)} \qquad \int_0 \mathscr{H}_s\, ds = n\, I\,, \qquad [236]$$

y de aquí que el campo H se mida en Ampère-vuelta sobre metro:

$$\text{(G. R)} \qquad \mathscr{H} = \frac{n\, I}{l}\,; \qquad [237]$$

En el sistema Giorgi no racionalizado el campo en el interior de un solenoide tiene en cambio la expresión

$$\text{(G no R)} \qquad \mathscr{H}' = 4\,\pi \frac{n\,I}{l}\,. \qquad [238]$$

De estas dos últimas expresiones se desprende que la unidad racionalizada de $\mathscr{H}$ (1 amp/m) es $4\,\pi$ veces mayor que la unidad no racionalizada, igual a 1 amp sobre $4\,\pi$ metros. Análogamente varía también la unidad con que se mide el vector $\mathscr{D}$ del sistema racionalizado y el $\mathscr{D}'$ del no racionalizado. En cambio en el sistema simétrico la *"racionalización"* se logra sin que tenga que hacerse variar la unidad de medida de ninguna magnitud física. Es algo tan trivial y automático que, no sin esfuerzo, puede designársele con el nombre pomposo de "racionalización del sistema de unidades". Todo se reduce a designar por una sola letra, K, al producto de $4\,\pi$ por k:

$$4\,\pi\,k = K, \qquad [239]$$

y donde aparece $4\,\pi\,k$ se escribe K; eso es todo. Si tratándose de los dos sistemas Giorgi se dijera: "Se cambia ε_0' por $4\,\pi\,\varepsilon_0$ y con sólo eso se pasa del sistema no racionalizado al racionalizado" no sería esto del todo exacto, pues habría que agregar que cambia en el pasaje la unidad de medida del vector $\mathscr{D}$ y algo análogo a esto cuando se trate de μ_0.

Lo cierto es que con la sustitución [239] se logra hacer desaparecer los $4\,\pi$, no expulsándolos por la puerta, para comprobar luego que los mismos penetran por la ventana, no. Desaparecen sin que se les expulse y por un proceso de simple *empaquetamiento*, donde, los $4\,\pi$, que han originado y originan tantas discusiones bizantinas, pueden hacerse presentes cuando lo queramos.

Con la sustitución [239] las ecuaciones de Maxwell [231] se escriben:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} D = K\,\rho\,; && \operatorname{div} B = 0\,, \\ &c \operatorname{rot} H = K i + \frac{\partial D}{\partial t}; && c \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned} \qquad [240]$$

Del mismo modo para el vector polarización eléctrica, que es el momento eléctrico de la unidad de volumen, se tiene:

$$P = \frac{D - E}{4\,\pi\,k} = \frac{D - E}{K}\,, \qquad [241]$$

resultando así para la susceptibilidad eléctrica χ_e la expresión

$$\chi_e = \frac{P}{E} = \frac{\varepsilon - 1}{K} . \qquad [242]$$

Del mismo modo la susceptibilidad magnética χ_m está vinculada a la permeabilidad μ así:

$$\text{(S. S)} \qquad \chi_m = \frac{J}{H} = \frac{\mu - 1}{K} \qquad [243]$$

donde J es la imantación específica o sea el momento magnético de la unidad de volumen. Se ve así por estas dos últimas expresiones que en el sistema simétrico las susceptibilidades eléctricas y magnéticas resultan ser magnitudes dimensionadas y la dimensión de ambas es igual a la dimensión inversa de K:

$$\text{(S.S)} \quad [\chi_e] = [\chi_m] = \left[\frac{1}{K}\right] = \left[\frac{Q^2}{\text{newton} \times m^2}\right] . \qquad [244]$$

En el sistema Giorgi las dimensiones de la susceptibilidad eléctrica resultan iguales a las dimensiones de esa magnitud en el sistema simétrico, pero con la susceptibilidad magnética ocurre, en el sistema Giorgi (racionalizado o no) algo muy curioso. En muchos tratados aparece esa magnitud como un número sin dimensiones y en otros con las dimensiones de una fuerza sobre el cuadrado de una intensidad de corriente. Esto sucede en concordancia con las dimensiones adoptadas para el polo magnético. Si se supone que la masa magnética tiene las dimensiones de una carga $\times$ una velocidad (lo que se hace cuando el vector $\mathscr{B}$ es la intensidad) entonces la susceptibilidad magnética resulta ser un número sin dimensiones:

$$\text{(S.G)} \quad [\chi_m] = \left[\frac{J}{\mathscr{H}}\right] = \left[\frac{(Qv) \cdot 1}{l^3 \cdot A/l}\right] = 1 . \qquad [245]$$

En cambio si la masa magnética es igual a una carga Q por una velocidad v (o c) y por la constante μ_0, se tendrá:

$$\text{(S.G)} \quad [\chi_m] = \left[\frac{(Q\, v\, \mu_0) \cdot 1}{l^3, A/l}\right] = [\mu_0] , \qquad [246]$$

o sea que las dimensiones de la susceptibilidad magnética resultan iguales a las de μ_0.

Con la sustitución [239] puede eliminarse la aparición explícita del factor 4π de todas las fórmulas eligiendo en un caso la constante k y en otros K. Así, por ejemplo, en el sistema Giorgi racionalizado la capacidad C_1 de un condensador plano y la capacidad C_2 de un condensador esférico están dadas por las expresiones

$$\text{(S.G.R)} \quad C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}; \quad C_2 = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \qquad [247]$$

Digamos, entre paréntesis, que frente a expresiones como éstas, se suele argumentar así: "Es más racional que figure el factor 4π en un problema de simetría esférica que en otro que no la tiene". Y aquí se utiliza la palabra racional como sinónimo de más razonable. En el sistema Giorgi no racionalizado, en lugar de las fórmulas anteriores se tiene de acuerdo a [224]:

$$\text{(S.G.noR)} \quad C_1 = \frac{\varepsilon_0' \varepsilon S}{4\pi d}; \quad C_2 = \varepsilon_0' \varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \qquad [248]$$

En el sistema simétrico estas mismas fórmulas pueden escribirse:

$$\text{(S. S)} \quad C_1 = \frac{\varepsilon S}{K d}; \quad C_2 = \frac{1}{k} \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}; \qquad [249]$$

con lo cual se logra que no aparezca a la vista el factor 4π, pero esto es, sin duda alguna, trivial. Se puede proceder así porque k es una constante dimensionada, con la cual no se busca construir nuevos vectores con significación física especial, lo que ocurre, en cambio, con las constantes ε_0 y μ_0. A continuación del párrafo de Sommerfeld que utilizamos como epígrafe de este trabajo, aquel autor decía: "Lo último (o sea que las dimensiones de $\mathscr{D}$ son las de una carga sobre una superficie) se deduce, por ejemplo, de la definición que figura en la cúspide de la teoría de Maxwell:

$$q = \int_S \mathscr{D}_n \, dS \text{ ». } \qquad [250]$$

A esto replicamos (y en nuestra réplica nos acompañaría

MAX PLANCK) que lo que surge de la definición dada por la teoría de Maxwell no es exactamente la [250] sino una expresión del tipo

$$q = \frac{1}{K} \int_S D_n \, d\, S\,, \qquad [251]$$

y no se puede hablar de las dimensiones de D si no se fijan previamente las de K. Precisamente la [251] es la ecuación equivalente a la [250] pero escrita en el sistema simétrico y en [251] la constante K está dimensionada de modo tal que el vector D resulta con idénticas dimensiones que el E.

Como la argumentación transcripta entre comillas más arriba, inmediatamente después de la fórmula [247], podría ser considerada como digna de tenerse en cuenta, escribiremos a continuación la expresión del campo H_1 producido en un punto por una corriente rectilínea indefinida y la del campo H_2 originada en el centro de un conductor circular, utilizando primero el sistema simétrico:

$$(\text{S.S}) \quad H_1 = \frac{k}{c}\,\frac{2\,I}{R}\,; \quad H_2 = \frac{k}{c}\,\frac{2\,\pi\,I}{R} = \frac{K}{2\,c}\,\frac{I}{R}\,. \qquad [252]$$

En el sistema Giorgi racionalizado, de acuerdo a la [229], se tiene:

$$(\text{G.R}) \quad \mathscr{H}_1 = \frac{1}{4\,\pi}\,\frac{2\,I}{R}\,; \quad \mathscr{H}_2 = \frac{1}{2}\,\frac{I}{R}\,. \qquad [253]$$

Se ve ahora que, tratándose de un conductor rectilíneo aparece el $4\,\pi$ y desaparece, en cambio, cuando se trata de calcular el campo en el centro de un conductor circular. En cambio en el sistema no racionalizado, por [229] resulta:

$$(\text{G. no R}) \quad \mathscr{H}_1' = \frac{2\,I}{R}\,; \qquad \mathscr{H}_2' = \frac{2\,\pi\,I}{R}\,; \qquad [254]$$

y de acuerdo a estas fórmulas y a la argumentación a que aludíamos, parecería ahora "más racional" el sistema no racionalizado. Estas fórmulas coinciden con las del sistema electromagnético $C\,G\,S$ no racionalizado, cuya unidad de "excitación magnética" ha sido denominada *oersted*. Como en este sistema es $\mu_0 = 1$, resulta que, para el vacío, 1 oersted es igual a 1 gauss.

Para ver como se modifican las unidades de $\mathscr{H}$ al pasar de un sistema racionalizado a otro que no lo es, consideramos conveniente dar aquí un ejemplo concreto. Si I = 50 Amp, R = 0,1 m, para el conductor rectilínio resulta, por ser k/c igual, aproximadamente, a 30 Ω:

$$H_1 \cong 30\ \Omega\ \frac{100\ \text{A}}{0,1\ \text{m}} = 30\,000\ \frac{\text{volt}}{\text{m}}$$

y como volt/metro es la unidad que hemos propuesto designar con el nombre de *lorentz* se tiene:

$$(\text{S.S})\quad \text{H}_1 \cong 30\,000\ \text{lorentz} \cong 1\ \text{gauss} \qquad [255]$$

De acuerdo a [253] se tiene:

$$(\text{G.R})\quad \mathscr{H}_1 = \frac{1}{4\,\pi}\ .\ 1000\left[\frac{\text{amp}}{\text{m}}\right] \qquad [256]$$

o sea, aproximadamente, igual a 80 *lenz*, pues éste es el nombre que se ha propuesto para designar la unidad de $\mathscr{H}$ en el sistema GIORGI racionalizado.

De acuerdo en cambio a [254] resulta:

$$(\text{GnoR})\quad \mathscr{H}_1' = 1000\left[\frac{\text{amp}}{\text{m}}\right] \qquad [257]$$

La unidad de $\mathscr{H}$ es 4 π veces mayor que la de $\mathscr{H}'$ pero como $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ tienen las mismas dimensiones se produce así la inevitable confusión.

Si se calcula ahora el campo $\mathscr{B}$ o $\mathscr{B}'$ se obtiene para ambos sistemas (el racionalizado y el no racionalizado) el mismo valor. Para obtener $\mathscr{B}$ en el sistema racionlizado debemos multiplicar por μ_0 (espacio vacío) cuyo valor es:

$$\mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7}\left[\frac{\text{newton}}{\text{A}^2}\right]$$

y así resulta de la [256]

$$\mathscr{B}_1 = \mu_0\ \mathscr{H}_1 = 10^{-4}\left[\frac{\text{newton}}{\text{amps} \times \text{m}}\right] = 1\ \text{gauss}\ . \qquad [258]$$

La intensidad $\mathscr{B}$ en el punto del ejemplo es entonces igual a 1 décimilésimo de *tesla* si se acepta esa denominación para la unidad GIORGI de $\mathscr{B}$.

En cambio a [257] la debemos multiplicar por μ_0' para obtener $\mathscr{B}'$ y como

$$\mu_0' = 10^{-7}\left[\frac{\text{newton}}{\text{A}^2}\right]$$

resulta:

$$\mathscr{B}_1' = \mu_0'\ \mathscr{H}_1' = 10^{-4}\left[\frac{\text{newton}}{\text{amp} \times \text{m}}\right] = 1\ \text{gauss} \qquad [259]$$

Obsérvese que aquí distinguimos el μ_0 y el μ_0' el $\mathscr{H}$ y el $\mathscr{H}'$ de los dos sistemas racionalizados y no racionalizados, pero cuando se pasa de un libro a otro se encuentra uno con idénticos signos que designan diferentes cosas y no es fácil advertir el porqué de la coincidencia final.

Observemos que de acuerdo a [255] podría parecer que el valor de 1 gauss es sólo aproximado cuando en verdad, de acuerdo a los datos del ejemplo, debe ser exactamente igual a 1 gauss. Lo que ocurre es que

$$\frac{k}{c} = 29{,}9793\ \text{ohm}$$

$$29979{,}3\ \text{lorentz} = 1\ \text{gauss}.$$

Para facilitar los cálculos en efectivo en el sistema simétrico escribimos a continuación los valores de las constantes que aparecen con más frecuencia:

$$k = 8{,}98758 \times 10^9 \left[\quad\right] \eqsim 9 \times 10^9 \left[\frac{\text{newton} \times \text{m}^2}{\text{Q}^2}\right]$$

$$c = 2{,}99793 \times 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] \eqsim 3 \times 10^9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

$$\frac{k}{c} = 2{,}99793 \times 10\ \text{ohm} \eqsim 30\ \Omega$$

$$\frac{k}{c^2} = 10^{-7}\left[\frac{\text{newton}}{\text{A}^2}\right]$$

$$4\,\pi\,k = K = 1{,}12941 \times 10^{11} \left[\frac{\text{newton} \times \text{m}^2}{\text{Q}^2}\right]$$

$$4\,\pi\,\frac{k}{c} = \frac{K}{c} = 376{,}731 \text{ ohm} \cong 377\ \Omega\,.$$

Para el cálculo de la fuerza magnetomotriz de un circuito magnético,

$$\oint_0 H_s\,ds = 4\,\pi\,\frac{k}{c}\,n\,I = \frac{K}{c}\,n\,I\,; \qquad [260]$$

basta entonces multiplicar los ampère-vuelta ($n\,I$) por 377 Ω y se obtiene el resultado en *volt*. Como a la unidad electromagnética $C\,G\,S$ (no racionalizada), de f.m.m., se la denomina *gilbert*, se tiene:

$$1 \text{ gilbert} = 1 \text{ oersted} \times 1 \text{ cm} \cong 30000 \text{ lorenz} \times \frac{1}{100}\text{ m} = 300 \text{ volt.}$$

Se halla directamente el *flujo dinámico* ϕ si se divide la fuerza magnetomotriz expresada en volt por la reluctancia Rm definida así:

$$R_m = \frac{c}{\mu}\,\frac{l}{S}\,, \qquad [261]$$

donde l es longitud, S sección, μ permeabilidad relativa al vacío (número puro) y c la velocidad de la luz. El flujo ϕ resulta entonces expresado en volt $\times$ segundo o sea en weber.

En cambio si la reluctancia se definiera así

$$\text{R}'_m = \frac{1}{\mu}\,\frac{l}{\text{S}}\,, \qquad [262]$$

lo que se obtendría al dividir la fuerza magnetomotriz por ella sería el flujo estático que habíamos designado con la letra φ.

Digamos finalmente que al estudiar la magnetización, empleando el sistema simétrico, resulta cómodo expresar el campo H en volt/m, y $B = \mu\,H$, en lorentz, aun cuando, como sabemos, H y B tienen las mismas dimensones físicas y 1 lorentz resulta igual a 1 volt/m.

La Plata, Julio de 1960

OBRAS CITADAS EN EL TEXTO

EINSTEIN, ALBERT (1905): *Zur Elektrodynamik bewegter Körper,* Annalen der Plysik, *17* pág. 891, 1905. La transcripción textual que hacemos la tomamos de la traducción de ALSINA FUERTES y CANALS FRAU, publicada bajo el título: *"La Relatividad"* (Memorias originales), Emecé Editores, Buenos Aires, 1950.

GERSZONOWICZ, S. (1941): *Unidades eléctricas y fotométricas,* Montevideo.

HILL, WALTER S. (1941): *Teoría general de las magnitudes físicas,* Facultad de Ingeniería del Uruguay, Montevideo.

ISNARDI, TEÓFILO (1952): *Sobre los sistemas de unidades eléctricas,* Ciencia e Investigación, tomo 8, pág. 4435. Este trabajo es un resumen de un informe presentado a la Asociación Física Argentina sobre la adopción del sistema GIÓRGI.

KALASHNIKOV, S. G. (1959): *Electricidad,* Ed. Grijalbo, México D. F. 1959.

LOEDEL PALUMBO, ENRIQUE *a*) (1948): *Aberración* y *Relatividad,* Anales de la Soc. C. Arg., 145, 3-13.
b) (1955): *Física Relativista,* Ed. Kapelusz, Buenos Aires. En este texto se encontrará además de la representación geométrica de las [179] y [180] una demostración directa de las mismas basada en la ley de Lorentz [50].

MINKOWSKI, HERMAN: *Space and Time.* En la colección de memorias ofiginales sobre el principio de relatividad con anotaciones de A. SOMMERFELD, de Dover Publication Inc., traducción al inglés de W. Perrett y G. B. Jeffery.

NETUSCHIL A. V. y STRAJOV S. V. *a*) (1959): *Principios de Electrotecnia,* II, Ed. Cartago, Buenos Aires.

b) (1959): *Principios de Electrotecnia,* III, Ed. Cartago, Buenos Aires.

PALACIOS, JULIO *a*) (1945): *Electricidad* y *Magnetismo,* Madrid (página VIII).

b) (1960): *La definición del lenz,* Boletín de la Asoc. Fís. Arg. y del C. N. de Cristalografía, 1960, pág. 6.

PAULI, W. (1958): *Teoría della Relatività* (traducción italiana de P. Gulmarelli), P. Boringhieri.

PI CALLEJA, PEDRO *a*) (1952): *Sobre regularidad y convencionalismo en el concepto de magnitud física*. Mathematicae Notae, XII, XIII, página 19.
b) (1954): *Las ecuaciones funcionales de la teoría de magnitudes*. Segundo Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latinoamérica. Centro de Cooperación Científica de la UNESCO para América Latina, Montevideo, págs. 199-280.

PLANCK MAX *a*) (1928): *Einführung in die Allgemeine Mechanik. Vierte Auflage*. S. Hirzel, Leipzig, página 36.
b) (1928): *Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus*. S. Hirzel, Leipzig, zweite auflage, página 14.

ROEDERER JUAN G. (1959): *El significado físico de los vectores B y H del electromagnetismo clásico*. Ciencia e Investigación, 15. página 19.

SIMONOFF MIGUEL (1943): *Electricidad*, en particular el cap. IX (*Metrología electromagnética*). Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas, La Plata.

SOMMERFELD ARNOLD *a*) (1935): *Über die Dimensionen der Elektromagnetishen Grössen*. Phys. Zeits, 36, 814.
b) (1948): *Vorlesungen über Theoretishe Physik*, III, *Elektrodynamik*.

TONNELAT MARIE-ANTOINETTE (1959): *Les Principes de la Theorie Électromagnétique et de la Relativité*, Masson et Cie., París.

ZEVEKE G. V. y IONKIN P. A. (1958): *Principios de Eletrotecnia*, I, Ed. Cartago, Buenos Aires.