

## ***Pensar el aprendizaje del Álgebra con herramientas vigotskianas***

María Cecilia Papini\*

### **Introducción**

Numerosas investigaciones acreditan las dificultades con las que se enfrentan los alumnos cuando son acercados a las primeras herramientas algebraicas. Dificultades para utilizar dichas herramientas en la resolución de problemas, o en general, para comprender algoritmos relacionados con las escrituras algebraicas.

La aparición de estas dificultades puede tener relación con las características propias de este tipo de conocimientos o con la necesaria ruptura de los conocimientos algebraicos respecto de los conocimientos aritméticos anteriores, pero también, con fenómenos de tipo didáctico como suele ser el excesivo énfasis puesto, en las clases de matemática, en la mecanización del trabajo algebraico en desmedro de un uso modelizador de estas herramientas. Estas dificultades se suelen manifestar generalmente, en falta de interés por parte de muchos alumnos, que a su vez puede pensarse como la

---

\* Profesora de Matemática y Física. Magister en Educación con orientación en Psicología de la Educación. Docente e investigadora del Departamento de Formación Docente y del Grupo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires - Tandil - Argentina.  
Correspondencia: E-mail: mcpapini@exa.unicen.edu.ar

manifestación de una profunda falta de comprensión.

El sentimiento de dominar aquello con lo que se interactúa, que provoca una gran satisfacción intelectual, se escapa para la mayoría de los alumnos cuando trabajan en “álgebra”, cometen o no errores, sean más o menos eficientes en la manipulación de las técnicas.

El propósito de este trabajo es avanzar en este problema y profundizar en qué sentido algunos aportes teóricos de la psicología cognitiva, y en particular de la teoría de Vigotsky, resultan relevantes para abordar cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental.

Para esto, se estructura el contenido alrededor de tres puntos.

En primer lugar, se propone una caracterización de la actividad algebraica, donde se retoma y relaciona información proveniente de la Didáctica de la Matemática alrededor de algunas cuestiones del aprendizaje del álgebra elemental. Luego se rescatan algunas ideas de la teoría de Vigotsky con el propósito de establecer relaciones con las explicaciones didácticas trabajadas, identificando posibles elementos nuevos que amplíen la descripción del aprendizaje de las primeras herramientas algebraicas. Finalmente, se trata de estructurar una única explicación que permita pensar el aprendizaje del álgebra elemental en la escuela a partir de la articulación de las explicaciones psicológicas y didácticas trabajadas.

### Algunos puntos de partida

El hecho de buscar aportes psicológicos para la didáctica de la matemática coloca la cuestión de cómo utilizar estos aportes, obliga a tomar partido respecto de cómo se asume la relación entre

la didáctica de la matemática y la psicología cognitiva.

Existen numerosos ejemplos que muestran la tergiversación que supone la aplicación directa de resultados de la psicología a la enseñanza. Posiblemente, la proximidad de los objetos de conocimiento de una y otra ciencia (la psicología se ocupa de las transformaciones de conocimiento *en el sujeto* y la didáctica de la matemática estudia las transformaciones de conocimiento *en el alumno*) explica la utilización directa en el aula de trabajos de psicología del desarrollo cognitivo sin cuestionarse sobre la naturaleza de los proyectos y de los objetos respectivos de cada una de estas ciencias (Brun, 1994).

G. Brousseau (1986) al distinguir entre el sujeto cognitivo y el alumno, pone de relieve el hecho de que muchas de las intervenciones del alumno obedecen a condicionamientos institucionales, no necesariamente ligados a las resistencias opuestas por el objeto de conocimiento. Por esta razón, las explicaciones psicológicas no serían suficientes para interpretar las intervenciones del alumno en situación de clase.

Se asume para este trabajo una relación de *complementariedad* entre psicología y didáctica. En términos de Vergnaud (1987 en Portugais, 1994) la psicología estudia y analiza las conductas y concepciones del sujeto mientras que la didáctica investiga los medios de hacer evolucionar estas concepciones y las competencias que les son asociadas, por lo tanto, la didáctica se apoya en la psicología. Recíprocamente, la didáctica aporta nuevos problemas a la psicología. Por ejemplo, el problema de la necesidad de tomar en cuenta los contenidos de conocimiento a la hora de realizar un análisis cognitivo y de desarrollo. Otro problema que introduce tiene que ver con la relación entre desarrollo y aprendizaje. Vergnaud plantea que las conductas observadas por el psicólogo no son independientes de la experiencia escolar y extraescolar del niño,

como tampoco estos aprendizajes (escolares y extraescolares) explican por sí solos las conductas observadas.

Respecto de la elección de la propuesta teórica de Vigotsky, en relación con los primeros aprendizajes del álgebra, existen varias razones que la justifican. En primer lugar se asume como punto de partida una caracterización de la actividad algebraica proveniente de una línea de investigación en Didáctica de la Matemática<sup>1</sup> que toma como supuestos psicológicos los propuestos por Piaget. Asumiendo, como dice Castorina (1996:35-40), que no existe inconsistencia entre las propuestas de ambos autores, en el sentido que la admisión de una de las teorías implique la negación de la otra, sino preguntas diferentes, pueden encontrarse en las explicaciones vigotskianas nuevas ideas que esclarezcan algunos aspectos de la cognición relativos al aprendizaje del álgebra elemental.

En segundo lugar, el tipo de aprendizaje que se aborda en este trabajo encuentra en la escuela su único lugar de circulación social y, como dice Bruner (en Carretero, 1996:23), Vigotsky tiene auténtica relevancia para la educación “porque la mayoría de sus ideas nacen en un contexto y con una finalidad educativa y desde ese lugar se relacionan con la Psicología” o, como reconocen muchos otros autores, las variables sociales en esta teoría tienen un papel central en los mecanismos subyacentes a las construcciones cognitivas.

Finalmente, puede considerarse central en la teoría vigotskiana la cuestión de los procesos de apropiación de los signos de la cultura y el impacto que ellos provocan en el desarrollo del sujeto, este punto coloca nuevamente a esta teoría en un lugar sumamente interesante para tratar de explicar la apropiación de los símbolos del álgebra.

## Una caracterización de la actividad algebraica

La pregunta “¿cuál es la naturaleza de la actividad algebraica escolar?” es una de las primeras en surgir del propósito general de este trabajo y, consecuentemente, la construcción de una descripción de la actividad algebraica elemental se plantea como necesaria para poder comprender mejor algunas de las dificultades, a las que se enfrentan los alumnos al entrar en el mundo del álgebra y el impacto cognitivo que esta entrada implica.

Para avanzar en la tarea nos hemos apoyado, en primer lugar, en el trabajo de numerosos autores que describen *el funcionamiento del álgebra elemental* desde una perspectiva didáctica<sup>2</sup>.

En segundo lugar, hemos tomado autores que ubican *el funcionamiento del álgebra con relación a la aritmética*<sup>3</sup>. El hecho de que la práctica aritmética es punto de apoyo para la actividad algebraica y que, al mismo tiempo, esta última supone una ruptura respecto de la anterior, ubica la cuestión del pasaje de la aritmética al álgebra como una problemática ineludible para todos aquellos que estudian cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental.

A los fines de este trabajo se esbozará una brevísima descripción de los dos puntos mencionados<sup>4</sup>.

### I. ¿Cómo funciona el álgebra?

Todo intento de caracterizar “el álgebra” es arduo. Se trata de una práctica, de una manera de abordar problemas, de una minicultura dicen algunos. Distintos autores focalizan en aspectos diferentes y todos en conjunto dan cuenta de esta actividad.

Las cuatro líneas que siguen pueden tomarse como puntos de partida y a la vez estructuradoras de una descripción del funcionamiento del álgebra:

### ***1. La actividad algebraica es esencialmente una actividad modelizadora*** (Chevallard, 1989)

Chevallard recupera la idea de modelización matemática no sólo considerando sistemas extramatemáticos (físicos, biológicos, económicos...) sino también sistemas matemáticos. Esto permite pensar en un cambio de relación entre el signo y su significado, cambia el status de representante y representado, por modelo (instrumento del trabajo matemático) y sistema (matemático o no matemático) a ser modelizado, o denomina al registro del modelo como el matemático y al objeto a estudiar como matematizado. En consecuencia puede decirse que todo objeto matemático es fruto de una matematización o necesariamente es producto de una modelización matemática.

La modelización de sistemas matemáticos o no matemáticos, usando las herramientas del álgebra, oprime el espesor semiótico de esta actividad humana en torno a un código dominante. Esta imagen voluntariamente empobrecida del sistema que ofrece el modelo matemático, a través de este aprisionamiento en torno a un código privilegiado, es la que posibilita esta ampliación indefinida de la potencia matemática (Chevallard, op. cit.:61).

Chevallard considera que esta idea de modelización permite dar una mirada global a la actividad matemática de toda la escolaridad y pone de relieve estos dos elementos esenciales de la actividad algebraica: la simbolización y el uso reglado de símbolos.

### ***2. El lenguaje simbólico como herramienta ocupa un lugar principal en esta actividad modelizadora. Las letras tienen distintos estatutos*** (Drouhard, 1995; Grugeon, 1995)

“Comprender” las escrituras simbólicas del álgebra elemental (ESA) es, en términos de Drouhard y otros (op.cit.), tomar en cuenta en conjunto su sintaxis, su denotación, su sentido y su interpretación.

Drouhard construye un modelo de tipo lingüístico para describir las expresiones simbólicas del álgebra elemental y las transformaciones formales de reescritura. Defiende la idea de que no se puede hablar de la significación dejando de lado la sintaxis (convenciones ligadas a la escritura de expresiones algebraicas).

Al comparar la sintaxis de las ESA y las de las lenguas naturales como el castellano, encuentra que no sólo existen diferencias (por ejemplo la escritura matemática se desarrolla en dos sentidos de la hoja de papel: horizontal y vertical), sino que las ESA conllevan una gran dificultad intrínseca de su sintaxis. Por ejemplo, la gran cantidad de convenciones que no siempre son explicitadas: las tres funciones del punto multiplicativo, el rol del paréntesis, el rol implícito de la barra de fracción, la no presencia de la constante multiplicativa 1, las reglas algebraicas formales para transformar expresiones... Estas convenciones pueden ser descritas de manera rigurosa y pertinente, pero la descripción no es trivial (Drouhard, 1998).

### ***3. Esta actividad se caracteriza por la puesta en juego de instrumentos de pensamiento que le son inherentes, la generalización es uno de ellos*** (Mason, 1996, Drouhard, 1995, Chevallard, 1989)

Respecto de los instrumentos de pensamiento que la actividad algebraica moviliza, Mason (1996) centra su atención en la actividad

de generalización en tanto instrumento de pensamiento clave para la matemática. La generalización no se encuentra presente sólo en la culminación de las investigaciones matemáticas, sino es natural, endémica y omnipresente; es central para la matemática como ciencia.

Mason cuestiona los programas de enseñanza de la matemática de la escuela actual porque enfatizan lo particular quitando la atención a lo general y responsabiliza a los teóricos de la educación de este efecto. Este autor sostiene que algunos teóricos han malinterpretado la epistemología de Piaget acerca del rol de los objetos concretos, generando sustento a una predilección por lo concreto, direccionando de alguna manera las actividades de enseñanza hacia la manipulación de objetos.

Mason afirma que las clases que no están “embebidas” de generalización y conjeturas no son clases de matemática, cualquiera sea el título que tengan (op.cit.:83).

#### **4. La relación entre la actividad modelizadora del álgebra y el aprendizaje y el manejo de las técnicas es un punto clave en el dominio del álgebra** (Grugeon, 1995, 1997, Drouhard, 1995)

En este punto se retoman algunos aspectos de una caracterización de la actividad algebraica, que es parte de la tesis doctoral de Grugeon<sup>5</sup> (1995) en la que coloca como estructuradoras las dimensiones “*instrumento*” y “*objeto*” (Douady, 1986), para dar una primera gran clasificación del saber algebraico elemental.

El trabajo de Grugeon da cuenta de la complejidad de la actividad algebraica y lleva a preguntarse cómo se constituye la posibilidad de articulación entre las múltiples dimensiones que ella identifica. En particular, la dimensión técnica tiene un lugar central en relación con la comprensión del álgebra. La autora encuentra que en la escuela el dominio de las técnicas puede vivir en forma

independiente de las actividades de matematización o modelización o, dicho de otro modo, existe tratamiento de tipo algebraico en donde los conocimientos matemáticos que se ponen en juego no forman parte de la resolución de un problema. En estas situaciones lo técnico no funciona como instrumento matemático, sino que es un fin en sí mismo.

Como consecuencia de lo anterior, los alumnos pierden la posibilidad de desarrollar estrategias de control refiriéndose a algún significado de aquello que manipulan. Drouhard y otros (1995) llaman “*calculadores ciegos*” a aquellos alumnos que pueden manipular las técnicas del álgebra pero no pueden hacer referencia a alguna significación en ningún momento. Encuentran que éste es uno de los puntos paradójicos y dificultosos del aprendizaje del álgebra, porque justamente en esta posibilidad de transformar las expresiones algebraicas sin referirse constantemente a los objetos que las expresiones simbolizan es donde reside la fuerza del álgebra; pero también es en este punto donde se genera la mayor fuga de sentido.

## **II. La relación entre la aritmética y el álgebra: continuidad y ruptura**

### **1. Relación dialéctica numérico-algebraica**

Chevallard (1985) considera que existe históricamente (e incluso antes de la aparición del lenguaje algebraico propiamente dicho) una relación dialéctica funcional entre lo numérico y lo algebraico.

La creación del lenguaje algebraico permite poner en evidencia la problemática del estudio de lo numérico, colocándola (sin oponerla) al lado de la perspectiva calculadora. Permite explicitar

lo que estaba implícito, se evidencia acá la copresencia de dos modos de enfrentar lo numérico.

Puede decirse que el lenguaje numérico tiene eficacia designativa para favorecer los cálculos, pero esa misma posibilidad de resolver las cuentas y reemplazar la operación entre dos números por su resultado, no conserva la traza o la historia de las transformaciones, tiende a ignorar el valor mostrativo de la escritura.

Al contrario, el lenguaje algebraico funciona como una memoria que conserva la huella o la traza de las operaciones efectuadas, proporciona información mostrativa porque hace aparecer la información pertinente. Es un instrumento superior para una tarea semejante, dice Chevallard (op.cit.:57), puede dedicarse al mismo tipo de problemas que la aritmética pero al mismo tiempo permite “desnudar” o mostrar la estructura de los problemas estudiados.

El álgebra permite evidenciar la problemática de lo numérico, explicita las propiedades de los números que estaban implícitas, es una *aritmética generalizada*, extendida, de los números particulares a números cualesquiera y, por lo tanto, de operaciones que se ejecutan a operaciones que se indican por signos. No se piensa tanto en el resultado de las operaciones como en elaborar fórmulas que solucionan todos los problemas de un mismo género. Esto también permite establecer que existen diferencias objetivas entre la aritmética y el álgebra.

## **2. Ruptura aritmético-algebraica**

Aprender álgebra implica un cambio de pensamiento, pasar de situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre los números y las operaciones, de un modo informal a un modo formal de representación y resolución de problemas. Este cambio de pensamiento requiere “romper” con algunos cono-

cimientos y “hábitos” que provienen del marco de referencia anterior de tipo aritmético.

Esta “ruptura” con la aritmética implica, por ejemplo, cambiar con (Brousseau, 1993, Vergnaud, 1987, Kieran, 1989):

- a) *La forma de ver el signo igual*
- b) *Las convenciones de notación*
- c) *Los métodos de resolver problemas*
- d) *La experiencia anterior con las letras*
- e) *El contrato didáctico*

## **Algunos elementos de la teoría de Vigotsky y su relación con el aprendizaje del Álgebra**

Se describen a continuación algunos elementos de la teoría de Vigotsky, brevemente explicados, y se establecen algunas relaciones o posibles explicaciones comunes con la caracterización anterior de la actividad algebraica.

Se estructura este apartado alrededor de dos puntos: *Las relaciones entre pensamiento y palabra; la formación y el desarrollo de los conceptos científicos en relación con el desarrollo de los conceptos espontáneos.*

### **1. Las relaciones entre pensamiento y palabra**

Para Vigotsky (1987) *la interacción social genuina es la que conduce el desarrollo psicológico humano.*

¿Cuál es el razonamiento que le permitió llegar a esta afirmación? Según Wertsch (1988:109-111) Vigotsky parte de la idea de que la organización de las lenguas humanas se sostiene en

dos tendencias opuestas que pueden parecer pero no son contradictorias: la **descontextualización** y la **contextualización**. El lenguaje tiene implícitamente el potencial para ser usado en la reflexión abstracta, en la descontextualización, en especial la descontextualización del "**significado**". Pero, al mismo tiempo, la organización lingüística tiene sus raíces en la contextualización, puesto que la estructura e interpretación de los signos lingüísticos depende de las relaciones con el contexto en que éstos aparecen. Esto tiene estrecha relación con la definición de "**sentido**" utilizada por Vigotsky<sup>6</sup>.

En sus términos, atribuir una palabra a una clase conocida o a un grupo de fenómenos conocidos, necesariamente implica generalización. Entonces, la interacción social presupone generalización. Y, recíprocamente, el desarrollo del significado de la palabra (generalización) se hace posible en presencia de la interacción social.

Además, encuentra una relación entre los niveles de generalización del sujeto y los niveles de desarrollo en la interacción social. Teniendo en cuenta estas dos tendencias opuestas (contextualización y descontextualización), reconoce dos funciones del habla y sus relaciones con los niveles de generalización: la **función indicativa** y la **función simbólica** del habla.

Para comprender esta distinción Wertsch plantea que se debe diferenciar entre las ideas de **significado** y **referencia** (inspiradas en Husserl), es decir, se debe distinguir el significado de la palabra de los objetos que ella representa o expresa. La función indicativa de la palabra implicaría una función puramente referencial, que se refiere directamente a los objetos. Su nombre (indicativa) tendría relación directa con la clasificación de los signos según Pierce, quien denomina índice a aquel signo que tiene una conexión física directa con el objeto, por ejemplo señalar con el dedo índice. En la comunicación, el signo vehiculante (índice) y el objeto son espacial y tem-

poralmente copresentes. Otra propiedad importante del índice, en términos de Pierce, es que al usarlo para identificar un objeto, este objeto se caracteriza en un mínimo sentido.

A partir de esta información es que Vigotsky plantea que los primeros niveles de generalización y los primeros niveles de desarrollo en la interacción social se basan en la función indicativa del habla. Al comienzo del desarrollo, las palabras del adulto son indicadores para el niño, sirven para dirigir la atención del niño hacia un objeto, no sirven para caracterizar objetos ni propiedades abstractas de estos objetos. La palabra no tiene un significado para el niño, sino muestra algo. Mientras que la función simbólica del habla implica la clasificación de eventos y objetos en categorías generalizadas y la formación de relaciones entre categorías posibilitando los niveles más avanzados de generalización.

¿Cómo se pasa de un nivel de funcionamiento semiótico contextualizado a un nivel descontextualizado?, ¿cómo se produce la descontextualización o el significado de las palabras o conceptos?

Dos aspectos de la explicación a estas cuestiones resalta Wertsch como novedosas y sumamente importantes: por un lado, **la génesis en el desarrollo de los significados de las palabras** (que continúan desarrollándose luego de la aparición de las palabras en el habla de los niños), y por otro, **la relación entre sistematicidad, generalización, mecanismos semióticos y significado de la palabra** (no sólo relaciones entre signos y objetos sino relación entre signos).

Respecto del significado de las palabras, Vigotsky traza una progresión ontogenética de tres fases: compilaciones no organizadas, complejos y conceptos. Estas fases evidencian desacuerdo con la idea de que una vez incluida una palabra en el vocabulario de un

niño este ha comprendido por completo su significado, por el contrario, esta aparición sólo marca el comienzo del desarrollo del significado de esa nueva palabra. Además, la categoría de los pseudoconceptos (un tipo de complejo) y su equivalencia funcional con los conceptos, explica la coincidencia sólo aparente, en el uso práctico del lenguaje, de los significados de las palabras entre un niño y un adulto.

El lenguaje natural es, en términos vigotskianos, un instrumento de pensamiento y de modo similar el lenguaje algebraico también es un instrumento de pensamiento que requiere o presupone actos de generalización.

Si bien cabe la comparación entre estos dos lenguajes, se debe tener en cuenta que los objetos que representa el álgebra no son los objetos ni las clases de objetos tangibles de la vida cotidiana, sino abstracciones y generalizaciones de anteriores abstracciones y generalizaciones de esas clases de objetos y que, si bien el lenguaje algebraico tiene simultáneamente una función de comunicación y de producción de conocimientos, no está sujeto de la misma manera que el lenguaje natural a las retroacciones de la interacción social, porque no es un instrumento de uso cotidiano.

En este punto aparece bastante claro el rol de la escuela, que es el medio social que ofrece la posibilidad de interactuar con este lenguaje, de construir un ambiente en el que se puedan desplegar funciones de comunicación del lenguaje algebraico que, por estar sometidas a las retroacciones de los otros sujetos, permitirían avanzar en la elaboración de su función simbólica.

Entonces también valdría preguntarse ¿cuál sería el correlato para el caso del álgebra de la idea de que el lenguaje es primero una propiedad de los objetos más que un símbolo de los mismos? ¿Qué significaría que se aprehende antes la estructura externa de la

“palabra algebraica - objeto”<sup>7</sup> que su estructura simbólica interna? ¿Qué forma cobraría la interiorización del lenguaje algebraico en pensamiento algebraico?

En un diálogo entre docente y alumnos a propósito de la resolución de un problema (en el marco del trabajo de tesis de Patricia Sadovsky<sup>8</sup>) se puede encontrar un ejemplo que tendría relación con las preguntas anteriores: frente al pedido de la profesora de proponer una fórmula para “fabricar” todas las soluciones, un grupo de alumnas explica que ellas hicieron una tabla y luego hicieron la fórmula “**para verificar**”. En la fase colectiva las alumnas insisten en que es la tabla la que da las soluciones que luego se comprueban a través de la fórmula. En este caso, **la representación algebraica se “agregaría” a la tabla de valores** en la que se expresan todas las soluciones y las alumnas no estarían en condiciones de aceptar que la fórmula constituye una representación del conjunto solución en lugar de un agregado a los objetos de conocimiento trabajados. Este modo de concebir la fórmula como representación del conjunto solución se lograría en el tiempo, como un producto de la interacción sostenida entre los alumnos y con el docente a propósito de este problema y de otros similares.

## 2. La formación y el desarrollo de los conceptos científicos en relación con el desarrollo de los conceptos espontáneos

Vigotsky (1987) afirma que un concepto es más que la suma de enlaces asociativos que se forman en la memoria, es un acto de pensamiento que no puede ser enseñado mediante la instrucción<sup>9</sup>. Un concepto expresado en una palabra es un acto de generalización que se desarrolla desde sus formas más primitivas hasta las más avanzadas, por lo tanto, no se mantiene estático sino que evoluciona.

Este desarrollo de los conceptos o evolución del significado de las palabras implica la evolución de muchas funciones intelectuales como la atención deliberada, la memoria lógica, la abstracción, la habilidad para comparar y diferenciar, cuyo dominio no es posible a través del aprendizaje aislado. Tampoco es posible la enseñanza directa de los conceptos, es decir, no es posible retransmitir un concepto a través de explicaciones, memorizaciones o repetición.

Respecto de la diferenciación entre conceptos espontáneos y no espontáneos, sostiene que el desarrollo de las actividades que dan origen a unos y a otros se relacionan e influyen constantemente, son partes de un proceso único: el de la evolución de la formación de un concepto, que se encuentra afectado por las variaciones externas y las condiciones internas. En su explicación, la instrucción tiene un lugar central, como una de las fuentes principales de los conceptos infantiles, "una fuerza poderosa en la dirección de su desarrollo; determina el destino de su evolución mental completa" (op.cit.:123).

Afirma que es pertinente esta diferenciación, entre conceptos espontáneos y no espontáneos, porque se forman a partir de condiciones internas y externas diferentes, y porque los motivos de su formación tampoco son los mismos. La mente se enfrenta a problemas muy distintos cuando asimila los conceptos de la escuela que cuando aprende los de la vida diaria. Y además, justifica esta división porque permite estudiar la relación entre la instrucción y el desarrollo de los conceptos científicos.

El pensamiento de un nivel superior está gobernado por las relaciones de generalidad entre conceptos. La presencia o ausencia de un sistema es la diferencia psicológica fundamental entre los conceptos científicos y espontáneos. Las particularidades del pensamiento infantil tienen relación con la falta de distancia con la experiencia inmediata. Esto no ocurre con los conceptos científicos

del niño que desde el principio involucran relaciones de generalidad y rudimentos de sistematización. Esta sistematización transforma gradualmente la estructura de los conceptos espontáneos del niño, ayuda a organizarlos en un sistema, y promueve su desarrollo a niveles superiores.

Coincide con las explicaciones de Piaget afirmando que los conceptos del escolar se caracterizan fundamentalmente por su falta de conocimiento consciente de las relaciones. Dice y se pregunta: "...El pensamiento infantil es no deliberado y no tiene conciencia de sí mismo. ¿Cómo puede entonces el niño alcanzar eventualmente el conocimiento y dominio de sus propios pensamientos?..." (op.cit.:125). El escolar avanza en el conocimiento y en el dominio pero no en la conciencia de sus propias operaciones conceptuales. La conciencia<sup>10</sup> y el control aparecen en la última etapa del desarrollo de una función, después de haber sido utilizada en forma inconsciente y espontánea. "...Para poder someter una función al control intelectual y volitivo, primero debemos poseerla" (op.cit.:128).

Justamente el desarrollo de la introspección comienza en los años escolares, del mismo modo en que el niño pasa de la primitiva percepción sin palabras a la percepción de los objetos guiada por palabras, el escolar pasa de la introspección no formulada a la verbalizada, percibiendo sus propios procesos psíquicos como significativos. Esto denota el comienzo de un proceso de generalización de las formas de actividad interna superior, que abre nuevas posibilidades de manejo de esta actividad interior. El hacernos conscientes de nuestras propias operaciones nos conduce a poder dominarlas (*idem*).

Si conciencia implica generalización, y generalización significa la formación de un concepto sobreordenado que incluye el concepto dado como un caso particular, se entiende que un concepto puede estar sujeto a un control consciente sólo cuando es parte de un

sistema.

“...Los conceptos científicos, con su jerarquía sistemática de intercalaciones, parecen ser el medio de desarrollo de conocimientos y las destrezas que luego se transfieren a otros conceptos. Los rudimentos de sistematización ingresan primero en la mente infantil por medio de su contacto con los conceptos científicos y son transferidos entonces a los conceptos cotidianos, cambiando totalmente su estructura psicológica” (op.cit.:130-131).

Vigotsky coloca la interrelación entre conceptos científicos y espontáneos como caso especial de la relación entre la instrucción escolar y el desarrollo mental del niño.

Cuando el niño opera con conceptos espontáneos su atención está centrada en los objetos a los cuales se refieren los conceptos y no en sus propios actos de pensamiento. Los conceptos científicos que el niño aprende en la escuela, por estar mediatizados por otros conceptos desde el principio, corren la atención de los objetos centrándola en las relaciones entre conceptos. Este cambio de plano en el pensamiento promueve en el niño la conciencia de su propio proceso mental.

En palabras de Wertsch (op.cit.):

“...los conceptos científicos son los que permiten a los humanos realizar la actividad mental con la máxima independencia del contexto concreto. Es decir, representan el punto final de la descontextualización de los instrumentos de mediación. Esto no significa que dicha actividad psicológica sea más pura o esté menos sujeta a limitaciones. Al fin y al cabo, a este respecto es crucial la estructura de los propios sistemas de signos. Esto significa, sin embargo, que los mecanismos semióticos sociohistóricamente desarrollados desempeñan un papel cada

vez más importante en el funcionamiento psicológico, mientras que el contexto concreto disminuye su papel. Esta negociación en la fuente del control en la actividad psicológica constituye el tema de la investigación sobre complejos y conceptos llevada a cabo por Vigotsky” (pág.118).

Para poder establecer el lugar que ocupan las prácticas educativas (como construcción social que “ofrece” los conceptos científicos) en el proceso de desarrollo del sujeto, la diferenciación al interior de los procesos psicológicos superiores (PPS) en “rudimentarios” y “avanzados” resulta interesante. Desde un punto de vista descriptivo, ambos comparten las características de los PPS pero se diferencian en el **grado de control consciente y voluntario** que implican, o en el **tipo de uso, crecientemente descontextualizado, que hacen de los instrumentos de mediación** (Baquero, 1996:100).

Desde un punto de vista “genético” ambos surgen como producto de la vida social pero, los PPS “avanzados” requieren para su formación de la participación del sujeto en **situaciones sociales específicas**, no alcanza con pertenecer y crecer en el seno de una cultura para que este tipo de procesos se desarrollen.

Baquero coloca como ejemplo paradigmático la relación entre la adquisición de las competencias para participar en los actos del habla y la adquisición de la lengua escrita. Por el solo hecho de pertenecer a una cultura los sujetos aprenden a hablar movidos por la necesidad de la comunicación. Mientras que esta sola pertenencia no alcanza para la apropiación de la lengua escrita. La adquisición de las competencias para la escritura se posibilitan con la participación en situaciones sociales específicas, que si bien requieren de la existencia previa del habla no resultan de su evolución espontánea. La escritura requiere de mayor abstracción y para ello de un creciente control voluntario y consciente de los procesos psicológi-

cos superiores.

Se puede pensar en una relación semejante entre las competencias relativas a los aprendizajes "numéricos" y a los aprendizajes "algebraicos". La posibilidad de manejarse con la idea de número y con algunas operaciones elementales entre números se obtiene a partir de la vida en sociedad, mientras que los aprendizajes que sistematizan esas ideas, que las ubican en un sistema teórico, utilizan o no el lenguaje algebraico, no aparecen en la vida diaria, su aprendizaje necesita de situaciones específicas, más precisamente de situaciones escolares de enseñanza y también implican un mayor nivel de abstracción acompañado de elementos que favorezcan un creciente control consciente y voluntario.

Baquero (op.cit.:102) pone énfasis en que a pesar de pertenecer ambos (PPS rudimentarios y avanzados) a la "línea cultural de desarrollo" tienen orígenes evolutivos diferenciados, procesos genéticos diferentes, pero también convergencia y mutua reorganización debida a la permanente interacción que sostienen durante el curso del desarrollo.

Estas características, de orígenes y procesos distintos y a la vez convergencia y mutua reorganización, se vincula con las ideas de **ruptura y continuidad** de las construcciones inferiores y superiores. La continuidad está sostenida porque cada generalización se realiza sobre objetos ya generalizados en el sistema anterior, pero simultáneamente existe una diferencia entre los objetos que se generalizan. La ruptura se produce porque no se generaliza sobre objetos sino sobre pensamientos (generalización de generalizaciones), entonces, no es la continuación de un movimiento en una misma dirección sino se produce un cambio en el vector del desarrollo, un paso hacia otro plano superior de pensamiento. Nuevamente el ejemplo que se cita es el del cambio desde los preconceptos aritméticos

del niño hacia los verdaderos conceptos algebraicos del adolescente: **los conceptos algebraicos son generalizaciones de los aritméticos** pero a la vez implican una nueva manera de pensar. (op.cit:133-134).

Se puede asumir que **los conocimientos algebraicos reestructuran los aritméticos** a través de la sistematización que las herramientas algebraicas permiten. La idea de continuidad y ruptura, recién señalada, podría explicar la relación entre aritmética y álgebra que los estudios didácticos también recuperan.

Esta diferencia en los orígenes de los PPS rudimentarios y avanzados también impulsa a Baquero a preguntarse sobre cuáles son las diferencias de las situaciones que les dan origen. Evidentemente existen diferencias en la naturaleza de las **actividades sociales** y en las **características de los instrumentos mediadores** y en su **modo de uso**, que dan lugar a los distintos tipos de procesos psicológicos. Y en este terreno la escuela tiene un lugar central.

En este contexto vigotskiano, dice Baquero, tiene sentido hablar de "impacto cognitivo de la escolarización" y también tiene sentido preguntarse si ese impacto tiene relación sólo con la apropiación de los instrumentos de mediación o con la modalidad de trabajo intelectual que propone la escuela. A partir del estudio de algunos trabajos de investigadores de la Psicología Socio-histórica (Scribner y Cole, Rogoff, Luria, van der Veer y Valsiner, Cazden, Edwards y Mercer en Baquero, 1996:106-118) plantea que

"no parece ser el dominio en sí mismo del sistema de representación o el instrumento mediador, como una lengua escrita, lo que produce mayor impacto sobre la vida cognitiva, sino las características de las situaciones de su apropiación efectiva, es decir, el uso que se realiza del instrumento de mediación apropiado".

El tipo de tareas que se plantea en la escuela sería el que genera diferencias en el modo de procesar la información de las personas.

Es para Vigotsky claro que la instrucción precede al desarrollo, puesto que las funciones que se requieren para los aprendizajes de las distintas áreas no están maduras aún cuando comienza la instrucción. Sus investigaciones le muestran que el desarrollo de las funciones psicológicas no precede a la instrucción, pero sí mantienen una interacción continua con las contribuciones de dicha instrucción.

Es también una manifestación de que el desarrollo se produce a consecuencia de la instrucción, la aparición de hábitos y destrezas en el niño antes de que pueda aplicarlos consciente y deliberadamente. Y en estas primeras adquisiciones provisorias tiene un rol importante la imitación. No se refiere a imitación como a una actividad mecánica, porque requiere de medios para pasar de algo ya conocido a algo nuevo. Tanto en el aprendizaje del habla como en el de las materias escolares la imitación resulta indispensable, dice.

En este punto es interesante destacar esta diferenciación que hace Vigotsky entre contenido de un concepto y los actos de pensamiento que permiten captar ese contenido (que representa con la analogía geográfica) porque aparece claramente la relación entre instrucción y desarrollo. Puede pensarse que en los procesos de aprendizaje del álgebra, el contenido conceptual que se aprende está integrado por las propias herramientas algebraicas, mientras que los actos de pensamiento que tienen que ver con estos aprendizajes son la generalización y las capacidades relativas a la modelización (posibilidad de recortar ciertas relaciones de un objeto o una situación y pensar ese objeto o situación en términos de las relaciones). La cuestión específica que aporta este punto de la teoría de Vigotsky

es la siguiente: cuando se introduce la noción de modelo, se la introduce a propósito de situaciones particulares, referidas tanto a cuestiones matemáticas o extra matemáticas. Los alumnos no necesariamente captan el alcance de lo que es un modelo<sup>11</sup>. Aceptan su utilización y lo ponen en juego por un proceso de imitación, tal vez porque el docente muestra el funcionamiento. Ahora, el hecho de “forzar” a utilizar e interpretar modelos matemáticos en variadas situaciones de interacción con problemas, y también en la interacción social con el conjunto de pares y el docente, “provoca” que los alumnos comprendan, progresivamente, más profundamente su funcionamiento y su significado hasta lograr un uso consciente, voluntario y controlado de la herramienta algebraica.

Como podía suponerse, es posible encontrar buenos argumentos en las ideas de Vigotsky para incluir la enseñanza del álgebra en el *currículum* de la escuela: los conocimientos algebraicos son sistemáticos e implican relaciones de generalidad, el hecho de asumir relaciones de inclusión entre conceptos y clases de conceptos implica tener conciencia de los procesos de pensamiento puestos en juego y asumirlos como de un determinado tipo, y esto conduce a poder dominar esas operaciones. Esta sistematización promueve el desarrollo del niño a niveles superiores.

Por otro lado, resulta interesante retomar esta cuestión, aparentemente paradójica, de que el habla interior se construye socialmente o de que la privacidad (subjetividad) se construye cuando se internaliza aquello que ha surgido en primer lugar de relaciones interpersonales. Se podría establecer una cierta relación entre esta idea y la noción de contrato didáctico ya definida en términos de Brousseau (1993).

Efectivamente, la noción de contrato didáctico viene a señalar que en las interacciones en la clase el alumno interpreta las

intervenciones de los otros (docente y alumnos) atribuyéndoles una cierta intencionalidad con respecto al objeto (matemático) con el que se está trabajando. La interpretación de esa intencionalidad puede funcionar como un motor de avance en el conocimiento en la medida en que la misma entra en diálogo con las posibilidades del sujeto.

¿Qué implicancias tendrían para un docente estas ideas? En principio, puede pensarse que hace falta una toma de conciencia de que hay mucho de implícito en las comunicaciones sociales, y que si bien no es posible ni deseable una explicitación exhaustiva de todos los significados que se movilizan, existiría la posibilidad de explicitación en clase de muchos de estos significados que serían imprescindibles para posibilitar la comunicación, el aprendizaje y el desarrollo.

Tanto el análisis de Baquero como el de Wertsch, otorgan un lugar central a la actividad de mediación. Parece sumamente interesante por sus posibilidades explicativas la idea de que el mayor impacto cognitivo no sólo tiene relación con la apropiación de instrumentos de mediación sino también, y quizás una relación más profunda, con el tipo de uso que se hace de esos instrumentos, o más precisamente con el modo de trabajo escolar.

### **Pensar el aprendizaje del Álgebra en la escuela a partir de la teoría de Vigotsky**

Dos grandes líneas pueden estructurar estas conclusiones: en primer lugar, se trata de explicar cuál sería la contribución del aprendizaje del álgebra al pensamiento del sujeto; en un segundo término, se tratan de particularizar algunos de los aspectos inclui-

dos en la primera explicación a modo de hipótesis que pueden resultar puntos de partida de investigaciones futuras en este área.

### **1. La contribución de la enseñanza del álgebra al pensamiento**

#### **La puesta en juego de actividades de tipo algebraico ofrece la posibilidad de impulsar el desarrollo intelectual de los sujetos**

¿Cómo se explica esta afirmación con los elementos teóricos planteados?

Utilizando argumentos vigotskianos la interacción con este tipo de instrumento de mediación semiótica genera **procesos psicológicos superiores de tipo avanzado**.

Cabe recordar que los PPS "avanzados" se diferencian de los "rudimentarios" en el grado de control consciente y voluntario que implican, o en el tipo de uso, crecientemente descontextualizado, que hacen de los instrumentos de mediación.

Dos características propias de la actividad algebraica permiten afirmar que trabajar con las herramientas del álgebra genera procesos psicológicos superiores avanzados:

- El álgebra en tanto que herramienta de generalización de la aritmética, requiere de un **mayor nivel de abstracción**, que tiene relación con una mayor distancia respecto del plano de los objetos. Es decir, los símbolos del álgebra encontrarían sus referentes en los números, que son símbolos de anteriores símbolos, son abstracciones y generalizaciones de anteriores abstracciones y generalizaciones. Esto necesariamente moviliza un plano superior de abstracción.
- Este cambio de plano de actuación intelectual, desde la relación

entre los objetos de la vida cotidiana y los números, hacia el plano de las relaciones entre los números y los símbolos del álgebra posibilita que el **control o la regulación** del pensamiento se independice del contexto y se ubique en el plano de las relaciones entre conceptos, el sujeto puede operar con el significado de los símbolos ejerciendo un control voluntario y consciente. Esta posibilidad es atribuida por Vigotsky a la **sistematicidad** propia de los conceptos científicos, en este caso algebraicos.

Esta relación entre aritmética y álgebra, o entre la evolución desde los PPS rudimentarios hacia los avanzados, que el paso del trabajo aritmético al algebraico promueve, no resulta un proceso "espontáneo". Por implicar orígenes y procesos distintos y a la vez convergencia y mutua reorganización, la relación entre aritmética y álgebra es de **continuidad y ruptura** a la vez.

La continuidad está sostenida porque la generalización algebraica se realiza sobre los objetos numéricos que ya son generalizaciones en el sistema anterior, pero simultáneamente existe una diferencia entre los objetos sobre los que se generaliza. La ruptura se produce porque no se generaliza sobre objetos de la vida cotidiana sino sobre números que ya son pensamientos (generalización de generalizaciones), entonces, no es la continuación de un movimiento en una misma dirección sino que se produce un cambio en el vector del desarrollo, un paso hacia otro plano superior de pensamiento.

Como se dijo, existe un cambio en el modo de pensar: pasar de situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre los números y las operaciones, renunciar a la búsqueda aritmética directa de la solución, extraer relaciones pertinentes e independientes, remitirse a formas simbólicas y a una sintaxis explícitas, de un modo informal a un modo formal de representación y de

resolución de problemas. Este cambio de pensamiento requiere "romper" con algunos conocimientos y "hábitos" que provienen del marco de referencia anterior de tipo aritmético.

Como puede desprenderse de estas ideas, el tipo de tarea que se realiza sobre los instrumentos de mediación semiótica es decisivo. Aún más, los estudiosos y continuadores de la teoría de Vigotsky sostienen que el tipo de **actividad** decide sobre el desarrollo tanto o más que los propios **instrumentos de mediación**.

En este punto se puede apreciar el rol fundamental del docente en cuanto al impulso del desarrollo de sus alumnos en tanto que es quien **decide el tipo de tareas a trabajar en clase**. Por otro lado, también se plantea hasta dónde se puede tener el control de los significados y procesos que se promueven en clase. Está claro que no es posible controlar todos los significados y la idea de contrato didáctico lo explica, pero sí es posible la toma de conciencia de este fenómeno y la puesta en juego de situaciones de reflexión y de explicitación que permitan acordar y compartir algunas nociones y convenciones hasta ese momento implícitas.

## 2. Algunas hipótesis para pensar la enseñanza del álgebra elemental

### a) La necesidad de la mediación del docente

- El modelo teórico que explica la producción de conocimientos en términos de adaptación a un medio resistente que ofrece retroacciones con relación a la validez de las relaciones matemáticas invertidas en la resolución de un problema, no resulta

pertinente para la producción de escrituras.

- El aprendizaje de las herramientas semióticas, que son el producto cultural de una compleja trama construida y reconstruida una y otra vez a lo largo de siglos, en contextos culturales muy diferentes a los de los alumnos actuales no puede producirse de la sola interacción del alumno con un problema. Pensar que la sola interacción con un tipo de problemas llevaría a producir las mismas escrituras sería considerar que el problema las determina, de manera independiente de los conocimientos, de la cultura en la que están inmersos, y de las funciones que le atribuyen quienes las producen.
- El aprendizaje de las herramientas del álgebra necesita de situaciones específicas que impliquen la intervención de otro sujeto que las ofrezca como tales.

#### **b) El tipo de tareas**

- El tipo de tarea que se proponga la apropiación de las herramientas del álgebra (como la apropiación de cualquier instrumento de mediación semiótica) debiera posibilitar las instancias de contextualización / descontextualización. Se está pensando en actividades que se propongan en contextos (tanto matemáticos como extramatemáticos) tales que permitan visualizar un objetivo, que ofrezcan elementos que permitan una adecuada interpretación (en el sentido de Drouhard).

#### **c) La validación de las escrituras en la interacción social**

- La validación de escrituras no se realiza a través de un sistema de teoremas matemáticos y esto distingue el proceso de emergencia

de las mismas respecto de la elaboración de otros objetos matemáticos.

- La función comunicativa del lenguaje, da pistas para fundamentar una hipótesis de trabajo según la cual las primeras producciones vinculadas al lenguaje algebraico se validarían en la interacción social, ofreciendo al alumno la posibilidad de tomar dichas herramientas como objeto de discusión y entender, desde ese marco, el sentido de lo convencional.

#### **d) La función intelectual de las herramientas del álgebra**

- El álgebra, por la posibilidad de generalización que supone es un dominio fértil para el desarrollo cognitivo de los alumnos. El lenguaje algebraico, en la medida en que está descontextualizado, obliga a la explicitación de relaciones que pueden quedar implícitas en el lenguaje natural. Esto también es una contribución al crecimiento intelectual.
- Existe entre la aritmética y el álgebra una relación de continuidad y a la vez de ruptura. Si bien todos los conocimientos aritméticos no pueden considerarse conceptos espontáneos, ese marco de relación entre conceptos espontáneos y conceptos científicos puede servir para pensar la relación aritmética y álgebra.
- La apropiación de las herramientas del álgebra genera una reestructuración del pensamiento aritmético anterior ubicándolo como un cuerpo teórico de conocimientos.
- Recíprocamente, los instrumentos de pensamiento anteriores (aritméticos) que posee el sujeto condicionan la apropiación de las herramientas del álgebra. Si el sujeto posee hábitos de gene-

ralización a partir del trabajo con problemas numéricos se ve favorecida esta posibilidad de continuidad entre los procesos de pensamiento de ambos dominios.

### **e) Las primeras instancias en el aprendizaje del álgebra**

- El lenguaje algebraico no puede pensarse de la misma manera que el natural, porque su circulación social es completamente diferente.
- Sin embargo, en algún punto puede establecerse una relación entre ambos. Vigotsky plantea que en el proceso de apropiación del signo existe una primera etapa de aprehensión de la estructura externa del signo o del uso correcto de las formas y estructuras gramaticales del lenguaje antes de que el niño haya entendido las operaciones lógicas en las cuales se apoyan, en esta etapa habría coincidencias provisorias de los referentes del adulto y del niño y no del significado de los signos.

Este tipo de explicaciones no justifica posturas didácticas que postulen una enseñanza "mecánica" o sintáctica del álgebra previa a otra instancia posterior de "significación" (mecánica en el sentido de que no recupera ningún significado, mecánica en el sentido de que es un fin en sí misma). Porque el manejo de la gramática del lenguaje sin un total manejo del significado en situaciones de interacción social que ofrecen permanentes retroacciones, desemboca necesariamente en instancias en las que se comparten los significados convencionales de las palabras. Mientras que estas actividades mecánicas no tienen otro fin más que el de manipular reglas sin apelar a ningún sentido, no ofrecen medios de retroacción.

Sí valdría interpretar que esta primera etapa vigotskiana, de aprehensión de la estructura externa del signo, implica concebirlo

provisoriamente como una propiedad de los objetos en lugar de un símbolo de dichos objetos. Como en el ejemplo que se planteó, es posible esperar una etapa en la que el adolescente concibe una ecuación como un "agregado" a una cuenta con números o una "verificación" de una tabla numérica, la ecuación sería una propiedad del objeto número y no tendría el status de símbolo de los objetos en cuestión. Ese modo de concebir los objetos del álgebra podrá evolucionar hacia considerarlos modelos matemáticos si existen (como en el lenguaje natural) variadas situaciones de interacción social (escolar) en las que un docente mediador genera interacciones con sus alumnos a través de actividades que pongan en evidencia, justamente, este aspecto modelizador de los símbolos algebraicos.

## Resumen

Este trabajo resulta de un informe de tesis<sup>12</sup>

que se inscribe en la problemática de las relaciones entre psicología cognitiva y didáctica de la matemática. Más específicamente, se propone avanzar en la tarea de precisar en qué sentido la psicología de Vigotsky<sup>13</sup> puede resultar relevante para abordar cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental.

El contenido de este artículo se estructura alrededor de tres puntos. En primer lugar, se propone una caracterización de la actividad algebraica, donde se retoma y relaciona información proveniente de la Didáctica de la Matemática alrededor de algunas cuestiones del aprendizaje del álgebra elemental. Luego se rescatan algunas ideas de la teoría de Vigotsky con el propósito de establecer relaciones con las explicaciones didácticas trabajadas identificando posibles elementos nuevos que amplíen la descripción del aprendizaje de las primeras herramientas algebraicas. Finalmente, se trata de estructurar una única explicación que permita pensar el aprendizaje del álgebra elemental en la escuela a partir de la articulación de las explicaciones psicológica y didáctica consideradas.

## Palabras clave

Álgebra; Cognición; Didáctica de la matemática.

## Abstract

This work results from a thesis report that deals

with relations between Cognitive Psychology and Didactic of Mathematics. More specifically, it is proposed to advance in the task of specifying in what sense Vygotsky's Psychology can turn out relevant to approach the questions related to the teaching and learning of elementary algebra.

The content of this article is structured into three points. Firstly, a characterization of the algebraic activity is set out, where information from Didactic of Mathematics about some questions on the learning of elementary algebra is retaken and related. Then, some ideas from Vygotsky's theory are taken to establish relations with the didactic explanations worked, inferring possible new elements that broaden the learning description of the first algebraic tools. Finally, it is intended to structure a single explanation that allows to think the learning of elementary algebra at school from the articulation of the psychological and didactic explanations worked.

## Key Words

Algebra; Cognition; Didactic of Mathematics.

## NOTAS

1. Por nuestra formación y recorrido, tomamos en este trabajo como referencia principal a la escuela francesa de Didáctica de la Matemática, sabiendo que estamos haciendo una fuerte restricción.

2. Hay muchos recortes didácticos posibles para un objeto matemático. Todos ellos incluyen, necesariamente, una mirada del funcionamiento matemático de dicho objeto. Pero esta mirada está atravesada por el hecho de que el "didacta" piensa en los objetos viviendo en instituciones en las que éstos se enseñan.

3. Ya se ha elegido ubicarse en una posición desde la cual "se ven" las rupturas en los procesos de construcción de conocimiento.

4. Una ampliación de esta descripción en Papini (2003).

5. En su tesis estudia las relaciones institucionales y personales con el álgebra elemental en la transición entre dos instituciones del sistema de educación media en Francia, una de las instituciones responde a un esquema de enseñanza de tipo profesional y la otra es un bachillerato (liceo).

6. Vigotsky (op.cit.:188) diferencia el sentido del significado de una palabra, retomando esta distinción de Paulhan, según él mismo dice. El sentido de una palabra es la suma de todos los sucesos psicológicos que la palabra provoca en la conciencia de una persona, una palabra adquiere un sentido del contexto que la contiene, cambia su sentido en diferentes contextos. Mientras que el significado es la zona más estable y precisa del sentido, se mantiene estable a través de los cambios de sentido. "El significado 'de diccionario' de una palabra -dice Vigotsky- no es más que una piedra en el edificio del sentido, nada más que una potencialidad que encuentra su realización en el lenguaje".

7. Se utiliza esta expresión para marcar el paralelo con la expresión de Vigotsky de "palabra-objeto" que pretende simbolizar esta idea de la palabra como propiedad del objeto, como un elemento externo al sujeto antes que un símbolo interno (Vigotsky, 1987:79).

8. Este trabajo se encuentra en elaboración y lleva el título "Condiciones de un espacio Didáctico de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas".

9. Se asume "instrucción" como el proceso de enseñanza socialmente

organizado, o escolarización formal.

10. Define conciencia como conocimiento de la actividad de la mente, conciencia de ser consciente.

11. En el sentido de "modelo matemático" definido por Chevallard (1989) y trabajado en apartados anteriores.

12. Titulado "*Algunos aportes de la psicología de Vigotsky a la problemática didáctica de los primeros aprendizajes del álgebra elemental*", para optar al grado de Magister en Educación orientación en Psicología de la Educación correspondiente al Programa de Postgrado en Educación de la Facultad de Ciencias Humanas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2003. Dirigido por Patricia Sadovsky, profesora adjunta ordinaria del Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UBA. Argentina.

13. Se ha decidido utilizar en este texto el apellido del autor ruso con la ortografía "Vigotsky" utilizando el criterio explicado en el texto de Castorina y otros (1996), pero en la bibliografía se ha respetado la ortografía elegida en el texto que se cita.

## BIBLIOGRAFÍA

- BAQUERO, R. (1996) **Vigotsky y el aprendizaje escolar**. Aique, Buenos Aires.
- BOLEA, P.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2001) "*La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad*" en **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 21.3. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BROUSSEAU, G. (1993) **Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática**. Traducción: Dilma Fregona y Facundo

Ortega. FaMAF, UNC.

BRUN, J. (1994) **Vingt ans de didactique des mathématiques en France**. La pensée sauvage, Francia.

CARRETERO, M. (1996) **Introducción a la Psicología Cognitiva**. Aique, Buenos Aires.

CASTORINA, J. A. y otros (1996) "*El debate Piaget-Vygotsky: La búsqueda de un criterio sobre su evaluación*" en **Piaget - Vygotsky: Contribuciones para replantear el debate**. Paidós Educador, Buenos Aires.

CHEVALLARD, Y. (1985) "*Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*". *Première partie* en **Petit x**, vol. 5, pp. 51-94.

CHEVALLARD, Y. (1989) "*Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*". *Deuxième partie* en **Petit x**, vol. 19.

CHEVALLARD, Y. (1990) "*Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*". *3ème partie* en **Petit x**, vol. 23.

CORTÉS, A.; VERGNAUD, G. y KAVAFIAN, N. (1990) "*De l'arithmétique a l'algebre: la negociation d'une rupture*".????

DOUADY, R. (1986) "*Jeux de cadres et dialectique outil/objet*" en **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 7.2. La Pensée Sauvage, Grenoble.

DROUHARD, J. P. y otros (1995) "*Calculateurs aveugles, denotation des écritures algébriques y entretiens faire faux*" en **Journal de la commission inter-IREM de didactique**, nº2, IREM de Clermont-Ferrand.

DROUHARD, J. P. (1998) "*Signos y sentidos en didáctica del álgebra*" en **Seminario Nacional de Didáctica de la Matemática**, CEFIEC, Facultad de Ciencias Exactas y Natu-

- rales, UBA, Buenos Aires.
- GRUGEON, B. (1995) "*Etude des rapports personnels y des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: B.E.P. et Première G*". **These de doctorat**, Université Paris 7, France.
- GRUGEON, B. (1997) *Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire* en **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 7.2. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- KIERAN, C. y FILLOY YAGUE, E. (1989) "*El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*" en **Enseñanza de las Ciencias** 7(3). Barcelona.
- MASON, J. (1996) "*Expressing generality and roots of algebra*" en **Approaches to Algebra. Mathematics Education Library**, Vol. 18, cap. 5. Kluwer Academic Publishers.
- PANIZZA, M.; SADOVSKY, P. y SESSA, C. (1995) "*Los primeros aprendizajes de las herramientas algebraicas. Cuando las letras entran en la clase de matemática*" en **Comunicación realizada a la sección REM de la reunión anual de la Unión Matemática Argentina**. Córdoba.
- PANIZZA, M.; SADOVSKY, P. y SESSA, C. (1999) "*La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito*" en **Enseñanza de las Ciencias**, vol. 17(3). España.
- PAPINI, M. C. (2003) "*Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra*" en **Relime**, vol. 6, núm.1. Comité Latinoamericano de Matemática educativa, México.
- PORTUGAIS, J. (1994) "*Didactique des Mathématiques et formation des enseignants*". Cap. 2. Ed. Peter Lang.
- VERGNAUD, G.; CORTES, A. y FAVRE ARTIGUE, P. (1988) "*Introduction d'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes*

- épistémologiques et didactiques*". En VERGNAUD, G. y otros (eds). **Didactique et acquisition des connaissances scientifiques**. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- VERGNAUD, G. (1997) "*El aprendizaje y la enseñanza de la matemática*", *Tercera parte*: pp.61-105. Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo? en **Referencias Pedagógicas**, Edicial.
- VYGOTSKI, L. (1987) **Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas. Comentarios críticos de Jean Piaget**. La Pléyade, Argentina.
- VYGOTSKI, L. (1988) **El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Instrumento y símbolo en el desarrollo del niño**. Crítica Grijalbo, México.
- WERTSCH, J. (1988) "*El análisis semiótico de Vygotsky*" en **Vygotsky y la formación social de la mente**. Cap. 4. Paidós, Madrid.
- WERTSCH, J. (1998) "*Un enfoque sociocultural de la acción mental*" en **Desarrollo y aprendizaje**. Aique, Buenos Aires.