Tecnología robotizada de producción: Tecnología de agrupamiento

Cuarta Parte

Para el agrupamiento óptimo se analizan las soluciones basadas en el modelo de las p-medianas.

Ing. Marisa R. De Giusti *

Resumen

Este es el cuarto de una serie de cinco artículos que describen las actividades de estudio realizadas hasta el momento en el tema "Técnicas para la automatización de la producción", dentro de los objetivos del Programa Institucional de Robótica (PIR) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata.

Dentro de dicho tema, esta serie se dedica a la disciplina denominada "Tecnología de agrupamiento", TA (Group Technology) de gran interés para los casos de producción de partes en lotes pequeños y medianos.

El presente artículo trata sobre la formulación matemática del problema de TA, que busca, del mismo modo que la formulación matricial, el agrupamiento óptimo de máquinas y piezas a producir. Se establecen las bases para esta solución y se describen brevemente dos modelos: el modelo de las p-medianas y el modelo generalizado de las p-medianas.

Formulación matemática del problema de TA

La mayoría de los modelos de programación matemática desarrollados en TA consideran una medida de distancia, disimilitud o diferencia entre las partes i y j denominada d_{ij}. Esta medida de distancia es una función que en ciertos casos obedece a los siguientes axiomas:

Reflexividad: $d_{ii} = 0$

Simetría: $d_{ij} = d_{ji}$

Desigualdad de triángulos: $d_{iq} \leqslant d_{ip} + d_{pq}$

Las medidas de distancia de uso más frecuente que cumplen estos postulados son:

- Medida de distancia de Minkowsky

$$d_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{kj}|^r \right]^{1/r}$$

donde r es un entero positivo y n, en el presente análisis, es el número de máquinas, en especial se utilizan dos casos:

— Medida métrica absoluta o distancia Manhattan ($r = 1$).

— Medida métrica euclidiana ($r = 2$).

- Medida de distancia ponderada de Minkowsky

$$d_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n} w_k |a_{ki} - a_{kj}|^r \right]^{1/r}$$

donde w_k es el factor de peso.

Se presentan dos casos especiales:

— Medida ponderada métrica absoluta ($r = 1$).

— Medida ponderada métrica euclidiana ($r = 2$).

- Medida de distancia de Hamming

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} z(a_{ki}, a_{kj})$$

$$\text{donde } z(a_{ki}, a_{kj}) = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{ki} \neq a_{kj} \\ 0 \text{ en todo otro caso.} \end{cases}$$

Modelo de las múltiples medianas (p-medianas) y modelo generalizado de las múltiples medianas (p-medianas generalizado) - Aplicaciones originales

Estos dos modelos se utilizan frecuentemente en problemas relacionados con los grafos, donde se busca localizar o ubicar una "facilidad", que haga mínima la suma de distancias desde ese lugar a todos los vértices del grafo. La ubicación óptima de esta facilidad se denomina *mediana del grafo.*

En particular el problema de encontrar *p-medianas* en un dado *grafo G*, extiende la definición anterior a localizar un número p de aquellas facilidades, tal que asignados los vértices restantes (N-p) a la más próxima de las p facilidades, la suma total de distancias resulte mínima. El problema de encontrar p-medianas se hace ligeramente más general si se asocia con cada vértice x_j un peso v_j (que represente su tamaño o importancia); la función a minimizar pasa a ser entonces la suma de las distancias ponderadas.

El problema de hallar *p-medianas* puede generalizarse aún más si se asocian costos fijos f_j a cada vértice x_j; f_j representa el costo fijo de construir la facilidad en el lugar representado por el vértice x_j. (Más adelante se verá qué representa ese costo en el caso de TA.) La generalización expuesta lleva al *modelo generalizado de las p-medianas.*

Mediana de un grafo: Formulación gráfico-matemática

Para un dado grafo $G = (X, C)$ donde X representa los nodos del grafo y C el conjunto de correspondencias entre los nodos, se definen dos números de trasmisión para cada vértice x_i que pertenece a X tal como sigue:

* Miembro de la Carrera de Investigador de la CIC de la Pcia. de Buenos Aires - Integrante del CeTAD. FI. UNLP.

$$Ts(x_i) = \sum v_j \, d(x_i, x_j) \qquad \forall x_j \in X$$
$$Te(x_i) = \sum v_j \, d(x_j, x_i) \qquad \forall x_j \in X$$

donde $d(x_i, x_j)$ es la menor distancia del vértice x_i al vértice x_j. Los números $Ts(x_i)$ y $Te(x_i)$ se denominan respectivamente trasmisión de salida y trasmisión de entrada del vértice x_i. Si el grafo es dirigido no se cumple la condición de simetria de la función distancia y Ts puede ser distinto a Te. Análogamente si el grafo es dirigido no se cumple la propiedad de desigualdad de triángulos.

Un vértice x_s para el cual:

$Ts(x_s) = \text{Mínimo}\ [Ts(x_i)]$ con $x_i \in X$,

se denomina *mediana de salida* del grafo G.

Un vértice x_e para el cual:

$Te(x_e) = \text{Mínimo}\ [Te(x_i)]$ con $x_i \in X$,

se denomina *mediana de entrada* del grafo G.

Véase ahora un ejemplo donde, para simplificar, v_j se ha tomado unitario.

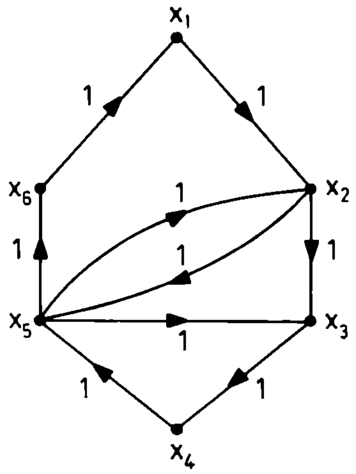

Fig. 20 — Grafo a partir del cual se construye la matriz de distancias mínimas D(G) del ejemplo.

Dado el grafo de la Fig. 20, se construye la matriz de distancias mínimas $D(G)$ que involucra a la *menor* distancia entre dos vértices. Por ejemplo, hay un camino entre x_1 y x_6 constituido por los nodos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6 de distancia 5, pero hay otro a través de los nodos x_1, x_2, x_5 y x_6 de distancia 3; este último valor, por ser el menor, es el que va en la matriz $D(G)$.

D(G) =

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$Ts(x_i)$
x_1	0	1	2	3	2	3	11
x_2	3	0	1	2	1	2	9
x_3	4	3	0	1	2	3	13
x_4	3	2	2	0	1	2	10
x_5	2	1	1	2	0	1	7*
x_6	1	2	3	4	3	0	13
$Te(x_i)$ →	13	9*	9*	12	9*	11	

A partir de los números de trasmisión (marcados con un asterisco) aparecen tres medianas de entrada: x_2, x_3 y x_5, todas con $Te = 9$, y una única mediana de salida: x_5, con $Ts = 7$.

Múltiples medianas (p-medianas)

Formulación gráfico-matemática

El problema de una única mediana puede extenderse a múltiples medianas (*p-medianas*). Sea X_p un subconjunto del conjunto X de los vértices del grafo $G = (X, C)$ y sea que X_p contiene p vértices. La idea es tomar un subgrafo y calcular la distancia desde cada uno de sus vértices a los del resto del grafo.

En este caso de "p" medianas:

$$d(X_p, x_j) = \text{Mínimo}\ [d(x_i, x_j)] \qquad \forall x_i \in X_p$$

y

$$d(x_j, X_p) = \text{Mínimo}\ [d(x_j, x_i)] \qquad \forall x_i \in X_p$$

donde, en ambos casos x_i no pertenece a X_p.

Si x_i' es el vértice de X_p que produce el mínimo en las ecuaciones anteriores se dice que el vértice x_j está asignado al x_i'. Los números de trasmisión para el conjunto X_p se definen de manera análoga al caso de vértice simple:

$$Ts(X_p) = \sum v_j \, d(X_p, x_j) \qquad \forall x_j \in X$$

y

$$Te(X_p) = \sum v_j \, d(x_j \, X_p) \qquad \forall x_j \in X$$

donde v_j representa el peso del vértice y Ts y Te representan la trasmisión de entrada y de salida respectivamente del conjunto X_p de vértices.

Un conjunto X_{p*} para el cual:

$$Ts(X_{p*}) = \text{Mínimo}\ [Ts(X_p)], \text{ con } X_p \subset X$$

es el conjunto de las p-medianas de salida del grafo G y similarmente para las p-medianas de entrada.

Utilizar estas ecuaciones para encontrar las p-medianas en grafos de tamaño moderado no es práctico (la complejidad es $n!/(n\text{-}p)!$, donde n representa el número total de nodos del grafo y p el número de vértices del subconjunto X_p, y se divide por 2 cuando el grafo no es dirigido). Por ello se expone una forma de resolución algorítmica del problema que resulta más cómoda.

Formulación por programación entera

Para el caso de TA el modelo de las p-medianas se utiliza para agrupar n partes en p familias de partes. El agrupamiento se realiza en función de la distancia entre las partes midiéndose ésta como la diferencia de máquinas utilizadas por una u otra pieza. En realidad el modelo original selecciona una característica medible con respecto a la cual se desea realizar el agrupamiento. Para utilizar el *modelo de las p-medianas* se realizan las siguientes asociaciones:

m: Número de máquinas.

n: Número de partes.

p: Número de familias de partes.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la parte } i \in \text{ a la familia de partes } j \\ 0 & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Lo anterior equivale a decir (en el caso $x_{ij} = 1$) en términos de grafo que el vértice i está asignado o reservado al vértice j.

d_{ij}: Medida de distancia o diferencia entre las partes i y j (diferencia de máquinas usadas por una y otra pieza).

$x_{ii} = 1$ equivale a decir que el vértice x_i es una mediana del grafo.

Haciendo una analogía con el problema de "Localización de depósitos", ampliamente estudiado en Programación entera y para el cual hay múltiples algoritmos en resolución, y aclarando que tal analogía es meramente superficial, Mulvey y Crowder [18] desarrollaron el siguiente modelo:

Modelo 1

El objetivo de este modelo es:

$$\text{Minimizar} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, d_{ij} \tag{1}$$

donde d_{ij} es la suma de distancias entre los objetos i y j. Esta minimización debe realizarse sujeta a los compromisos (2) a (5).

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

que significa que un dado x_i no puede ubicarse en más de un grupo al mismo tiempo.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jj} = p \tag{3}$$

que significa que hay exactamente p grupos.

$$x_{ij} \leqslant x_{jj}, \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

asegura que la parte i pertenezca a la familia de partes j solamente cuando esta familia exista.

$$x_{ij} = [0, 1] \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

que asegura la resolución del problema como un problema de variable entera.

Aplicando al problema de TA y dada la matriz de incidencia parte - máquina considérese el siguiente ejemplo:

$[a_{ij}] =$

1	2	3	4	5	Nº de parte / Nº de máquina
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	2
0	1	0	1	0	3
1	0	1	0	0	4

Forme $p = 2$ familias de partes y sus correspondientes celdas de máquinas.

Para la matriz anterior resulta la siguiente de distancias de Hamming.

$[d_{ij}] =$

1	2	3	4	5	Nº de parte / Nº de parte
0	4	0	4	3	1
4	0	4	0	1	2
0	4	0	4	3	3
4	0	4	0	1	4
3	1	3	1	0	5

A partir de este planteamiento la resolución del modelo 1 por computadora nos lleva a una solución análoga a la obtenida para este mismo problema en la formulación anterior pero menos laboriosa.

Kusiak [3] sugiere algunos programas específicos para esta tarea.

Modelo generalizado de las p-medianas

El problema de encontrar p-medianas corresponde a una clase más general denominada "problemas de alojo y desalojo de facilidades". Estos problemas son más generales que los de p-medianas, dado que a cada vértice x_i se le asocia un costo f_i. Se define entonces el *modelo generalizado de las p-medianas* del siguiente modo:

Dado un grafo $G = (X, C)$, donde X es el conjunto de los vértices del grafo y C el conjunto de los arcos del grafo, con matriz de distancias mínimas $[d(x_i, x_j)]$, pesos de los vértices v_i y costos fijos de los vértices f_i, el problema consiste en encontrar un subconjunto X_p que contenga p-vértices tal que sea minimizada la función:

$$\sum_{A} f_i + T(X_p) \tag{6}$$

con $A = \{x_i \in X_p\}$.

Por lo tanto el objetivo es minimizar no ya la trasmisión $T(X_p)$ de X_p sino la función (6) que incluye el costo fijo asociado con cada vértice x_i de X_p. En la práctica f_i representa el costo fijo de construir la facilidad (subestación, depósito, etc.), en el lugar representado por el vértice x_i, específicamente en TA significa el costo del plan de procesos. El problema de las p-medianas es un caso particular en que todos los costos f_i de los vértices son iguales (llámeselo f) de manera tal que el primer término de la ecuación (6) es una constante pf independiente de la elección del conjunto X_p.

Aplicación del modelo generalizado de las p-medianas para el planeamiento y selección de planes de proceso en TA

Formulación por programación entera

El modelo 1 descripto en el método no generalizado de las p-medianas se desarrolló bajo la suposición de que cada parte corresponde solamente a un conjunto de operaciones de máquinas, conocido como plan de proceso. Para salvar este escollo Kusiak modificó el modelo para poder considerar más de un plan de procesos para cada parte. Cada plan de procesos tiene un costo asociado (equivalente al f_i de la presentación anterior).

El objetivo es minimizar la función compuesta por la suma total de distancias medidas y los costos de producción.

El problema de selección de planes de proceso es elegir, para cada conjunto de planes de proceso (de cada parte) solamente uno representativo de modo tal que la suma de las distancias entre los planes de proceso seleccionados y sus costos respectivos resulte mínima.

Para presentar el modelo generalizado de las p-medianas se utiliza la siguiente notación:

- F_k: Conjunto de planes de proceso para la parte k, $k = 1, \ldots, l$.
- p: Número requerido de familias de partes.
- d_{ij}: Distancia medida entre los planes de proceso i y j.
- c_j: Costo de producción del plan j.
- n: Número de familias de partes.

Modelo 2

Consiste en minimizar la función:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_j x_{jj} \qquad (1')$$

Esta minimización deberá hacerse sujeta a las condiciones (2') a (5').

$$\sum_{B} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (2')$$

con $B = \{i \in F_k\}$, y $k = 1, \ldots, l$.

asegura que para cada parte se selecciona un único plan de procesos.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jj} \leq p \qquad (3')$$

impone el limite superior de familias de partes.

$$x_{ij} \leqslant x_{jj}, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \qquad (4')$$

$$x_{ij} = \{0, 1\} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \qquad (5')$$
$$\forall\, j = 1, \ldots, n$$

Los compromisos (4') y (5') son análogos a los (4) y (5) del modelo 1.

Ejemplo

Dada la matriz de incidencia parte-máquina 1 y el vector de costos de producción c_j, forme $p = 2$ familias de partes y sus correspondientes celdas de máquinas.

	Número de parte: 1			2		3		4		5		Nº de plan de procesos / Nº de máquina
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$[a_{ij}] =$	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	2
	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	3
	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	4

Matriz 1

Para simplicidad supóngase un vector de costos de producción unitario.

$$c_j = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

De lo anterior resulta la siguiente matriz de distancias de Hamming:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Nº de plan de procesos / Nº de plan de procesos
$[d_{ij}] =$	0	∞	∞	2	2	2	2	2	2	0	3	1
	∞	0	∞	2	0	2	0	2	0	2	3	2
	∞	∞	0	2	2	2	2	2	2	0	1	3
	2	2	2	0	∞	4	2	4	2	2	3	4
	2	4	2	∞	0	2	0	2	0	2	1	5
	2	2	2	4	2	0	∞	0	2	2	1	6
	2	0	2	2	4	∞	0	2	4	2	3	7
	2	2	2	4	2	4	2	0	∞	2	4	8
	2	0	2	2	0	2	4	∞	0	2	1	9
	0	2	4	2	2	2	2	2	2	0	∞	10
	3	3	1	3	1	1	3	1	1	∞	0	11

Todos los elementos en la matriz con ∞ muestran que para cada F_k sólo debe seleccionarse un plan de procesos. Por ejemplo, para la parte 1 pueden elegirse los planes de procesos 1, 2 ó 3; en la matriz de distancias $[d_{ij}]$ la fila 1 representa al plan de procesos 1, y si se ha elegido este plan para la parte 1, los elementos d_{12} y d_{13} (que representan la distancia entre el plan 1 y 2 y entre el 1 y 3) valen ∞ para indicar que no puede elegirse más de un plan para cada parte.

A partir de aqui el modelo 2 se resuelve por computadora. Kusiak [8] sugiere algunos programas específicos para esta tarea.

Extensiones en TA

Otros modelos matemáticos más complejos permiten tratar con el problema del número y tamaño de los agrupamientos, sin embargo su complejidad excede los objetivos de esta publicación; a tal fin pueden consultarse [19] y [20].

Los sistemas de manufactura automatizados poseen ciertas características a resaltar, algunas de las cuales están vinculadas con el número de dispositivos auxiliares utilizados para la producción de una parte. Estos dispositivos son: fijaciones, manipuladores, alimentadores, etc. De hecho las partes son maquinadas y ensambladas usando herramientas de un diseño distinto al de aquéllas de los sistemas clásicos de manufactura. Para la manufactura de cada parte genera un conjunto de planes de proceso.

Cada plan de proceso especifica los requerimientos de herramientas y dispositivos auxiliares así como las operaciones a ser realizadas y su còsto.

Kusiak [21] desarrolla un modelo de programación entera para la selección de un conjunto de planes de proceso en el cual el menor número de dispositivos se corresponde con el menor costo total. En esta misma publicación el autor propone el uso de algoritmos heurísticos para tratar con problemas reales de complejidad elevada.

Conclusiones

En este artículo se han presentado dos modelos matemáticos: el modelo de las *p*-medianas y el modelo generalizado de las p-medianas para resolver problemas en TA. El primero de ellos utilizado en casos sencillos en que cada pieza a manufacturar es realizable solamente con un único plan de procesos. Para este modelo se han expuesto: la formulación teórica (gráfico-matemática), de difícil resolución y un modelo de programación entera.

En el caso real de existencia de múltiples planes de proceso a elegir para cada pieza, se ha expuesto el modelo generalizado que involucra como factor de peso los distintos costos de los planes de producción.

En la 5ª parte de esta publicación se describirán muy brevemente los métodos gráficos de resolución del problema de TA. ■

Referencias

[8] Kusiak, Andrew y Finke, Gerd: "Selection of process plans in automated manufacturing systems". IEEE Journal of Robotics and Automation, EE.UU., Vol. 4, Nº 4, agosto 1988, págs. 397, 402.

[18] Mulvey, John M. y Crowder, Harland: "Cluster analysis: an application of Lagrangian relaxation" - Management Science. Vol. 25, Nº 4, abril 1979, págs. 827 a 370.

[19] Kusiak, A.; Vannelli, A. y Kumar, K. R.: "Clustering Analysis: Models and Alghoritms", Contr. Cybern., Vol. 15, Nº 2, págs. 139, 154, 1986.

[20] Lashkari, R. S.; Dutta, S. P. y Nadoli, G.: "Part family formation in FMS - An integer programming approach". Ed. Modern Production Management System. Amsterdam, Holanda. 1987, págs. 627, 635.