

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**

**Facultad de Ciencias Exactas**

**Estudio de las figuras de interferencia generadas por cavidades  
no convencionales . Aplicaciones al procesamiento de imágenes .**

**TESIS**

**para optar al título de Doctor en Física**

**Roberto D. Torroba**

**1982**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**

**Facultad de Ciencias Exactas**

**Estudio de las figuras de interferencia generadas por cavidades  
no convencionales . Aplicaciones al procesamiento de imágenes .**

CENTRO DE INVESTIGACIONES OPTICAS CONICET - UNLP - CIC CASILLA DE CORREO 124 1900 LA PLATA REP. ARGENTINA
--

**TESIS**

**para optar al título de Doctor en Física**

**Roberto D. Torroba**

**1982**

A mi esposa  
y a mi hijo

*Deseo expresar mi gratitud al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, por apoyo recibido a través de sus becas; al Centro de Investigaciones Ópticas, por facilitarme sus instalaciones, así como también la amistad brindada por sus miembros, y en general, a todas aquellas personas que de una forma u otra contribuyeron a alentar y afianzar mi labor científica.*

## INTRODUCCION

La Optica es una rama de la Física que ha recibido un importante impulso en el último trienio, fundamentalmente por la adopción del formalismo de la Teoría de las Comunicaciones, así como por la aparición del láser, que se ha convertido en un instrumento invaluable para la comprensión de los procesos básicos de la interacción de la radiación con la materia, a la vez que brinda una fuente de iluminación de características únicas.

Con el objeto de comprender mejor los fines de la presente tesis, haré a continuación, una breve exposición de las experiencias que motivaron y dieron forma a las ideas que voy a desarrollar.

Básicamente se pueden dividir en dos clases, una de ellas se enmarca en la "Optica de Fourier", y la otra en lo que llamaré, estudio de las figuras interferenciales producidas por reflexiones múltiples en cavidades resonantes no convencionales.

### A. Optica de Fourier

Según expresé, en los últimos tiempos, la Optica se ha vinculado estrechamente con la Teoría de las Comunicaciones. Esto es comprensible, porque tanto los sistemas de comunicaciones, como los sistemas que dan lugar a la formación de imágenes, están diseñados para conducir o coleccionar información. En el primer caso, esta información es de naturaleza temporal, mientras que en último es de naturaleza espacial.

Pero, quizás la más fuerte relación entre ambas disciplinas, provenga de la matemática similar que emplean para describir los respectivos sistemas ópticos y electrónicos. Esta matemática es el análisis de Fourier.

La razón principal de esta coincidencia no es simplemente el interés común en la información, sino más bien ciertos conceptos básicos que comparten los sistemas de comunicación y los de formación de imágenes.

Así, los circuitos eléctricos y los dispositivos ópticos tienen propiedades llamadas linealidad e invarianza, que pueden ser descriptas matemáticamente con simpleza usando las técnicas del análisis en frecuencia.

Tal como se describe a un amplificador de audio en términos de su respuesta en frecuencia temporal, así es conveniente caracterizar a un sistema óptico en términos de su respuesta en frecuencia espacial.

También ciertos elementos no lineales, como las emulsiones fotográficas, tienen relaciones entrada-salida totalmente análogas a las componentes electrónicas no lineales, como los diodos, a los que es aplicable un análisis similar.

Hay que reconocer, asimismo, que se puede explotar el hecho de que como el espectro de una función temporal puede ser alterado de un modo preestablecido, también se puede modificar al espectro de una función espacial.

Por esto, los adelantos en la Teoría de las Comunicaciones, fueron adaptados y trasladados al dominio de los fenómenos ópticos, ampliando así las posibilidades en el procesamiento de la información.

Dentro de este esquema, analicé la coherencia espacial y temporal de la luz de un láser, más específicamente con el fenómeno llamado granularidad óptica, más conocida por el término anglosajón "speckle".

La naturaleza granular de la imagen coherente es una consecuencia directa de la rugosidad a nivel óptico de la superficie de un objeto y de la alta coherencia de la fuente de luz láser usada para iluminarla.

Es así, que todos los puntos del objeto son capaces de interferir en la retina, teniendo en ella por imagen a una figura de difracción característica del sistema óptico del ojo. Son las interferencias de estas figuras de difracción las que producen este aspecto granular. El fenómeno es el mismo si se reemplaza al ojo por un aparato fotográfico. Luego de revelada, la imagen muestra un "speckle" que depende de la abertura del objetivo. Cuanto más grande es ésta, más fina es la estructura de la granularidad.

Como la granularidad sigue los movimientos del objeto que la produce y empleando una técnica de doble exposición en una misma placa, en un primer paso, llegué al análisis de pequeñas deformaciones<sup>(1)</sup>.

En los trabajos que siguen, existe una marcada influencia por parte de un Seminario<sup>(2)</sup> en la especialidad, dictado por prestigiosos profesores, tales como Joseph W. Goodman, de la Universidad de Stanford, E. Leith, miembro de la Universidad de Michigan, y Christopher Dainty, de la Universidad de Rochester, entre otros.

Así, participé en el desarrollo de un método de filtrado, haciendo uso de aperturas múltiples en el plano de una lente, usada para registrar un interferograma, con el fin de aumentar, en el plano de Fourier, la cantidad de lóbulos de difracción, que llevan información sobre una deformación general sufrida por el objeto<sup>(3)</sup>.

Consiste en un análisis bidimensional de un diagrama de "speckle", por doble exposición, que se crea iluminando a una superficie plana con un haz de luz láser, describiendo el rol jugado por la función iluminación de la apertura. Entre las exposiciones, la superficie sufre una deformación general en su plano. Para delinear las componentes de la deformación en cada punto del campo se hicieron dos aproximaciones, una basada en el tratamiento del campo como un todo, mediante un filtrado de Fourier, con una apertura en el plano de las frecuencias, y la segunda por simple iluminación puntual del film.

La experiencia adquirida en el estudio de deformaciones haciendo uso del "speckle", me permitió formar parte de un grupo interdisciplinario, cuyo objetivo era aplicar un método interferométrico para certificar la validez de una propuesta relacionada con un nuevo tipo de aparatología ortodóntica, basada en el uso de "brackets" verticales en lugar de los clásicos horizontales<sup>(4)</sup>.

Fue empleado un simulador para modelar la situación física de la boca bajo tratamiento y probar que la acción de esta nueva técnica es producir movimientos de las piezas dentales en dirección perpendicular al eje de sus raíces. La idea era fotografiar dos planos de observación perpendiculares entre sí simultáneamente. Se aplicó la técnica de doble exposición en una misma placa, antes y después de aplicar tensiones siguiendo el estilo ortodóntico.

Los resultados de las experiencias permitieron comprobar que los "brackets" verticales producen el efecto de bajar el punto de aplicación en la resultante de las fuerzas, consiguiéndose de tal manera, que los momentos que producen rotaciones sean mínimos y el movimiento efectivo de las piezas sea prácticamente una traslación pura.

Otro de los ejemplos de los trabajos realizados en el área del procesamiento de la información lo constituye el hecho de aprovechar lo que se da en llamar "speckle" modulado por franjas de Young, aplicándolas para la obtención de diferencias entre dos imágenes<sup>(5)</sup>.

Estas franjas complementarias de Young se logran usando luz láser polarizada y un arreglo de tres polarizadores además de una pupila consistente de una máscara con dos aperturas. Se colocan en cada una de ellas un polarizador, de manera que las direcciones de polarización sean mutuamente perpendiculares, y el tercer polarizador a  $45^\circ$  cubriendo ambas aperturas simultáneamente.

Mediante esta técnica, la calidad del restado resulta ser independiente de la longitud de onda utilizada, del ángulo de campo y de los errores de alineación (si estos son pequeños) en las direcciones de los polarizadores.

#### B. Estudio de reflexiones múltiples en cavidades no convencionales.

Los primeros ensayos de trazados de rayos, se hicieron al analizar la difracción de haces gaussianos que se propagan en la atmósfera a distintas distancias, tópico que entre otras cosas, involucró al diseño de un sistema telescópico expansor-colimador, que permitiera enfocar a la luz proveniente de un láser, que emite en el infrarrojo, a distancias que variaban desde los trescientos metros al kilómetro, para aplicarlo en alineación a grandes distancias, procurando minimizar los efectos de las perturbaciones atmosféricas.

Esto constituyó un primer paso para el manejo, teórico y experimental, de la teoría de la difracción, sus conceptos y aplicaciones, de fundamental importancia para tratar la propagación de ondas, así como los cálculos de reflexiones múltiples entre dos superficies especulares, tal como en el caso del sistema expansor ya señalado.

Este era un montaje del tipo Cassegrain, formado por dos espejos esféricos.

Los esfuerzos posteriores se centraron en las figuras de interferencia, obtenidas al registrar en un medio fotosensible, la salida de un interferómetro de Fabry-Perot de caras no paralelas, corroborando experimentalmente, por un lado, los perfiles de intensidad teóricos que responden a una formulación presentada en la tesis de la Dra. Lía Zerbino<sup>(6)</sup>, y por el otro, comprobar que un interferómetro de tales características, podría ser usado para generar hologramas sin un haz explícito de referencia, idea que se origina también en la tesis arriba mencionada.

Formando parte de las investigaciones de los aspectos básicos del fenómeno de interferencia, pero inspirado desde el punto de vista de las cavidades re-

sonantes para ser usadas en la generación de luz láser, trabajé en la caracterización de los modos de una de estas cavidades.

Justamente, a raíz de esto último, surge la preocupación por extender su aplicación al dominio de los procesos holográficos.

### C.Contenido general del presente trabajo.

En lo expuesto hasta ahora, he destacado las dos ramas principales en las que he desarrollado mis investigaciones.

El objetivo primordial es intentar relacionarlas en un trabajo común, y el punto de partida para la conexión de estos dos temas, está precisamente, en el estudio de las figuras de interferencia generadas por la superposición de dos o más ondas que, provenientes de una fuente común, experimentan un atraso de fase, al transitar por un dispositivo de reflexiones múltiples.

Es así, que en el Capítulo I, se presenta el análisis de un interferómetro de Fabry-Perot con una variante: sus caras están levemente desalineadas.

Con el conocimiento de la diferencia de camino óptico entre un rayo que atraviesa la cavidad sin reflejarse, y otro que sufre un cierto número de reflexiones, se calcula una expresión para la intensidad transmitida por el dispositivo, obteniendo los perfiles teóricos, que fueron corroborados experimentalmente, según se detalla en la Sección I.4.

Por otra parte, si un registro fotográfico de tal perfil de intensidad, es colocado en una pupila e iluminado con luz coherente y monocromática, da lugar a la reconstrucción de un frente de onda, que reproduce la presencia de varias fuentes puntuales.

Este comportamiento es explicado por un proceso holográfico en el que no se emplea haz explícito de referencia siendo éste generado por el interferómetro de caras no paralelas<sup>(7)</sup>, tanto bajo iluminación del mismo con luz coherente como incoherente, como se demuestra en las Secciones I.6 y I.7.

Este hecho lleva a interpretar que esta cavidad puede servir para obtener hologramas, sin embargo, se desprende de los resultados que los hologramas así obtenidos son de una moderada calidad.

En el Capítulo II se muestra el diseño de un nuevo tipo de cavidad, en la

que las dos superficies reflectoras son paraboloides en disposición confocal<sup>(8)</sup>.

Se diferencian dos formas de operación basadas en la condición de iluminación. Una llamada Modo 1, bajo la incidencia de una onda plana uniforme de luz coherente y monocromática, normal al eje óptico, y la otra, llamada Modo 2, definida por la incidencia de una onda esférica, con foco de emisión ubicado en el foco común del sistema.

Al calcular la diferencia de camino óptico, se encuentra que es constante e independiente de las coordenadas del punto de observación, siendo este resultado para ambos Modos.

Como consecuencia de ésto, la intensidad a la salida del Modo 1 es igualmente una constante, característica similar a la de un Fabry-Perot alineado bajo incidencia de una onda plana.

Sin embargo, en el Modo 2, la intensidad a la salida sí depende del punto de observación. En las Secciones II.5 y II.6 se analizan las expresiones matemáticas para las situaciones discutidas.

Pero, si bien se supone que el índice de refracción dentro de la cavidad es igual al del medio que lo rodea, lo que facilita los cálculos, este hecho impone restricciones al materializar los experimentos.

Es por ello que en el Capítulo III se trata la introducción de ciertos dispositivos correctores, que evitan el cambio de dirección del rayo incidente, ante el cambio de pasar de un medio a otro.

A pesar de salvar este inconveniente, estos elementos generan reflexiones adicionales, lo que obliga a calcular una nueva diferencia de camino óptico, resultando en una alteración de la figura de interferencia, que es en definitiva lo que interesa.

En particular, se restringen los análisis al Modo 1, subdividiéndolo a su vez en una reclasificación que obedece al sentido de iluminación de la onda plana, en razón de que ello produce un punto, o varios, de enfoque a la salida del dispositivo.

Para ambas situaciones se verifica la existencia de una figura de interferencia consistente en anillos concéntricos con el eje óptico.

A su vez, en la condición de un sólo punto de enfoque, si se hace un registro fotográfico y este es iluminado, una vez revelado, por una onda plana, reconstruye a una fuente puntual real y otra virtual simultáneamente, o sea que

actúa a la vez como lente convergente y divergente, interpretándose a este fenómeno como que tal registro es un holograma de una fuente puntual.

El caso de múltiple enfoque es análogo, suponiendo una superposición de lentes.

Nuevamente, se está ante un proceso de reconstrucción de frente de onda a través de un registro interferencial. En la Sección III-4 se da una comparación de estos resultados con la teoría de formación de placas zonales.

El Capítulo IV está dedicado al análisis teórico exhaustivo de los diagramas interferenciales mencionados. Se prueba, además, que dado su semejanza con una lente, pueden ser usados como medio para generar hologramas de Fourier, con la ventaja adicional de no requerirse un haz explícito de referencia. Esto constituye el nexo de unión con la "Optica de Fourier", ya que esta clase de hologramas permite atacar problemas de procesamiento de la información.

El Capítulo V muestra, fundamentalmente, las distintas experiencias que confirman los cálculos del Capítulo IV.

También se discuten algunas aplicaciones concretas en la interferometría holográfica, para determinar deformaciones, tanto en magnitud como en dirección.

En la Sección V.5, se analiza la posibilidad de que el interferómetro parabólico en sí, sirva como dispositivo holográfico.

Finalmente, el Capítulo VI está destinado a las conclusiones que surgen de los datos obtenidos, comentando las distintas alternativas que ofrece este punto de vista del fenómeno de interferencia entre dos o más ondas, asociado a la "Optica de Fourier", demostrando que el tema no queda agotado en la presente exposición.

Cabe agregar que todos los trabajos de esta tesis fueron realizados contando con la colaboración de la Licenciada Nora Rodriguez, quien a su vez encara un aspecto fundamental de la holografía, cual es el de generar hologramas sin haz explícito de referencia, gracias a la introducción de figuras de interferencia que, al mismo tiempo simplifican los montajes experimentales, tal como se detalla en su tesis titulada "Estudio de las figuras de interferencia generadas por cavidades no convencionales. Aspectos holográficos".

Se desprende de lo expuesto, que estos diagramas de interferencia, así como los dispositivos resonantes que los generan, brindan un amplio campo de investigación.

Por ésto tenemos en común los desarrollos de los Capítulos I, II y III, de los cuales se abren las dos vías originales, que culminan en ambos trabajos doctorales.

Son de destacar las importantes colaboraciones de la Dra. L. Zerbino y el Dr. H.J. Rabal en las esclarecedoras discusiones mantenidas, así como también en la confección de los programas de computadora, el apoyo recibido por parte del C.C. J. Pouchou.

El Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata cedió gentilmente el uso de su comparador microdensitométrico Grant, y en el Taller de Optica de esta institución, se fabricaron los interferómetros que se usaron en las experiencias.

Todos los experimentos se llevaron a cabo en las instalaciones del Centro de Investigaciones Opticas (CIOp).

La dirección de las becas obtenidas y el asesoramiento general en las distintas tareas de investigación, estuvo a cargo del Dr. Mario Garavaglia y el Dr. Mario Gallardo, Director y Subdirector, respectivamente del CIOp, sin cuyos invaluable aportes, no se podría haber concretado el presente trabajo.

## REFERENCIAS

1. Torroba, R., Rodríguez, N., Zerbino, L., Rabal, H., Gallardo, M. y Garavaglia, M.  
"Aplicaciones de las técnicas de granulado (speckle) al estudio de pequeñas deformaciones", I Conferencia Regional sobre Ensayos No Destructivos, (UN, CNIE, OEA) 11-15 Junio 1979, Bs.As., Argentina.
2. Seminar on Fourier Optics, CONICET-National Science Foundation (USA), La Plata, 16-24 Agosto 1979.
3. Rodríguez, N., Torroba y Zerbino, L., "Técnica de filtrado para el análisis de deformaciones por speckle", Reunión Nacional de Física 79, Villa Giardino, Córdoba, Argentina, Noviembre 1979.
4. Abbattista, M., Abbattista, L., Rodríguez, N., Torroba, R., Zerbino, L., Gallardo, M. and Garavaglia, M., Application of vertical brackets in orthodontic treatments: A laser speckle study", Lasers and Applications, Springer-Verlag, Springer Series in Optical Sciences, Vol. 26, pag 279-285, Berlin 1981.
5. Rabal, H.J., Torroba, R., Rodríguez, N., Garavaglia, M., "Restado de imágenes mediante speckle modulado por franjas de Young, haciendo uso de tres polarizadores", Reunión Nacional de Física 80, Bariloche, Río Negro, Diciembre 1980.
6. Zerbino, L., "Interferometría con luz monocromática: Estudio de las figuras de interferencia obtenidas por reflexiones múltiples. Aplicaciones de sus características holográficas", U.N.L.P., 1978.
7. Zerbino, L.M., Rabal, H.J. y Garavaglia, M., "A compact device for interferometric holography", Proc. of Optics, Photonics and Ionics Engineering Meeting, OPIEM'79, Strasbourg, France 1979.
8. Torroba, R., Rodríguez, R., Zerbino, L.M., Andrade, O., Gallardo, M. y Garavaglia, M., "Interferometría en cavidades no convencionales", Reunión Nacional de Física 80, Bariloche, Río Negro, Diciembre 1980.

## CAPITULO I

- I-1            Introducción.
- I-2            Cálculo de la diferencia de camino óptico producida por un interferómetro de Fabry-Perot desalineado.
- I-3            Perfil de intensidad de la figura de interferencia.
- I-4            1. Análisis de casos límites.  
                  2. Resultados experimentales.
- I-5            Difracción a través de los registros de la figura de interferencia.
- I-6            Holografía utilizando un interferómetro de Fabry-Perot desalineado: caso coherente.
- I-7            Difracción a través de los registros de la figura de interferencia generada por un conjunto de fuentes puntuales espacialmente incoherentes.
- I-8            Posición y magnificación de las imágenes en el caso de iluminación incoherente.
- I-9            Resultados experimentales.Caso incoherente.
- I-10          Comentario general.

## I-1 INTRODUCCION

Como es bien sabido, el análisis de los fenómenos interferenciales en diferentes estructuras ópticas debe resolver, por un lado, el aspecto geométrico relacionado con la localización de franjas y, por el otro, la distribución de intensidad de la figura de interferencia.

En el caso de interferómetros de reflexiones múltiples, tal como el Fabry-Perot, fueron empleados diferentes tipos de montajes experimentales en diversas aplicaciones científicas o metrológicas<sup>(1-4)</sup>, ya sea con espejos planos-paralelos o bien esféricos.

La geometría y el perfil de intensidad de los diagramas de interferencia producidos por tales estructuras ópticas eran ya conocidos para los casos en que los espejos estén alineados en condiciones normales.

Más recientemente, Brossel<sup>(5)</sup> y Aebischer<sup>(6)</sup> investigaron dichas geometrías y perfiles producidos por un interferómetro de Fabry-Perot ligeramente desalineado.

Este capítulo sigue la metodología de estos trabajos, pero introduce condiciones más generales: i) se consideran tres diferentes índices de refracción en la estructura óptica completa, ii) la fuente luminosa puede ser localizada cerca del interferómetro, lo cual implica el tratamiento de ondas esféricas, y iii) el plano de observación también puede ubicarse cerca del interferómetro.

Los resultados teóricos obtenidos fueron comprobados para algunos casos límite previamente conocidos, asegurando así la consistencia de la metodología empleada describiéndose además las pruebas experimentales que los corroboran.

Se analiza también el fenómeno de difracción producido cuando un haz de luz incide sobre una pupila que contiene el registro fotográfico del diagrama de interferencia de un Fabry-Perot desalineado, y se estudia su comportamiento holográfico, tanto para el caso de iluminación coherente como espacialmente incoherente.

## I-2 CALCULO DE LA DIFERENCIA DE CAMINO OPTICO Y PERFIL DE INTENSIDAD DE LA FIGURA DE INTERFERENCIA PRODUCIDOS POR UN FABRY-PEROT DESALINEADO

Para calcular la diferencia de camino óptico entre los rayos que pasan a través de un interferómetro de Fabry-Perot desalineado, es necesario caracterizar dicha estructura óptica.

Con este propósito, se considera una cuña con superficies parcialmente reflectantes  $E_1$  y  $E_2$  que forman un ángulo  $\alpha$  entre sí<sup>(7,8)</sup>.

La Figura I.1 muestra una sección transversal del ángulo diedro formado entre  $E_1$  y  $E_2$ , donde  $\Omega$  es el vértice de  $\alpha$ ,  $S$  es una fuente puntual monocromática y  $n_1, n_2$  y  $n_3$  son los índices de refracción de la estructura óptica. Se tendrán en cuenta las reflexiones múltiples de los rayos en el medio caracterizado por  $n_2$ , localizado entre  $E_1$  y  $E_2$ .

Existen rayos, tales como  $L_0$ , que atraviesan la cuña sin sufrir reflexiones, y otros, tales como  $L_p$ , que son reflejados  $p$  veces entre las superficies  $E_1$  y  $E_2$  antes de abandonar la cavidad.

Se determinará la diferencia entre las longitudes de camino óptico para los rayos  $L_p$  y  $L_0$ , cuando ambos arriban al punto de observación  $P(x,y,z)$ , interfiriendo uno con otro.

Suponiendo que las coordenadas de la fuente puntual  $S$  son  $(-\rho, 0, 0)$ , que  $h$  es el ancho de la cuña en el plano  $x-z$  y planteando las siguientes aproximaciones:

- i) el valor de  $h$  no excede de varios milímetros ;
- ii) el ángulo de la cuña es pequeño (del orden de  $10^{-4}$  a  $10^{-3}$  rad. ) ;
- iii)  $p$ , el número de reflexiones, es del orden de las decenas ;
- iv)  $2p\alpha \approx 2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \approx 0(10^{-2})$  ,

se puede obtener una fórmula general para la diferencia de camino óptico válida, tanto para el caso en que la fuente y el plano de registro estén en el infinito, así como que ambos estén cerca del interferómetro. Se considerará la posibilidad de que  $\rho$  varíe desde  $1m$  hasta infinito y que  $x$ , la coordenada del punto  $P$ , pueda tomar valores similares.

Se obtiene entonces la siguiente expresión para dicha diferencia

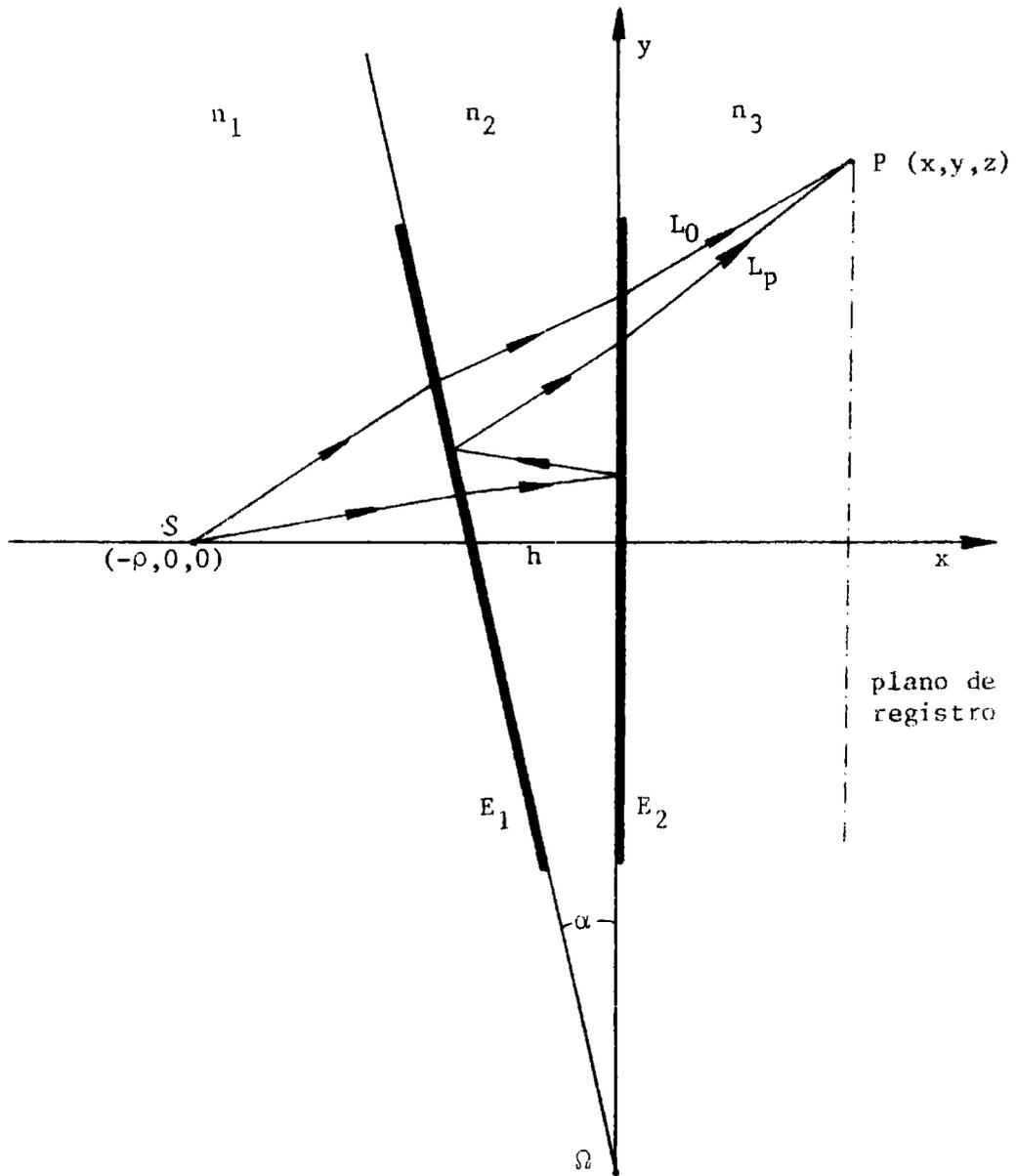


Figura I - 1

de camino:

$$\begin{aligned}
\delta_p = & \frac{n_1^2 - n_3^2}{n_1} 2p \left\{ \rho h \frac{n_3}{n_2} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x+\rho)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\sqrt{(x+\rho)^2 + y^2 + z^2}}{(x+\rho)^2} \right] + \right. \\
& + \frac{\rho h y \left[ (\rho - 2h)(n_2/n_1) + h \right]}{(x+\rho) \sqrt{(x+\rho)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\rho^2 \alpha h y \left[ (2p+2)(n_3/n_1) - (n_3/n_2) - (n_2 n_3/n_1^2) \right]}{(x+\rho)^2 \sqrt{(x+\rho)^2 + y^2 + z^2}} \left. \right\} \\
& + \frac{n_2^2 - n_3^2}{n_2} 2p \left\{ \frac{h \rho y \alpha \left[ (2p+2)(n_2/n_1) - 1 \right]}{(x+\rho) \sqrt{(x+\rho)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{h \sqrt{(x+\rho)^2 + y^2 + z^2}}{(x+\rho)} \right\} - \\
& - \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_2} \cdot \frac{n_3^2}{n_1^2} \cdot 2p \left\{ \frac{\sqrt{y^2 + z^2} \rho h \alpha \left[ (2p+2)(n_1/n_2) - 1 \right]}{(x+\rho) \sqrt{(x+\rho)^2 + y^2 + z^2}} + \right. \\
& - \frac{(\rho - h) \sqrt{y^2 + z^2} (n_1/n_3) \sqrt{(x+\rho)^2 + y^2 + z^2}}{(x+\rho)^2} \left. \right\} + \\
& + \frac{n_3^2}{n_2} 2p \frac{(\rho + x) h}{\sqrt{(x+\rho)^2 + y^2 + z^2}} + n_3 \frac{2p \alpha y \left[ (\rho - h)(n_2/n_1) + h \right]}{\sqrt{(x+\rho)^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.1)
\end{aligned}$$

### I-3 PERFIL DE INTENSIDAD DE LA FIGURA DE INTERFERENCIA

La ecuación (1.1) representa la diferencia de camino óptico entre dos rayos que llegan al mismo punto de observación  $P(x,y,z)$ , uno de ellos directamente transmitido a través de la cuña, y el otro transmitido luego de  $p$  reflexiones dentro de ella.

Con el objeto de saber si la ecuación (1.1) es aplicable en el caso más general, se deben calcular la amplitud e intensidad transmitidas a través de la cuña, lo que implica calcular la intensidad registrada en el punto  $P(x,y,z)$ .

Con esta ecuación de intensidad es posible graficar el perfil para compararlo con el registro microdensitométrico experimental de la figura de interferencia.

La expresión de  $\delta_p$  permite obtener la diferencia de fase entre los rayos según:

$$\phi_p = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_p \quad , \quad (1.2)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la fuente puntual que da origen al diagrama de interferencia.

Teniendo en cuenta que el punto de observación  $P(x,y,z)$  está localizado a una distancia finita del interferómetro, y que  $\exp(ikr_q)/r_q$  es la onda esférica que, proveniente de  $S$ , ha sufrido  $q$  reflexiones antes de llegar a  $P$ ; la amplitud transmitida puede ser escrita como:

$$A_t = \sum_{q=0}^p t_1 t_2 (r_1 r_2)^q A_i \exp(ikr_q)/r_q \quad , \quad (1.3)$$

donde  $t_1, t_2$  y  $r_1, r_2$  son las transmitividades y reflectividades de las superficies  $E_1$  y  $E_2$ , siendo  $k = 2\pi/\lambda$ .

Como  $\delta_q = r_q - r_0$  se puede escribir  $(r_0/r_q) = 1 - (\delta_q/r_q)$  y la ecuación (1.3) toma la forma:

$$A_t = \left\{ t_1 t_2 + \sum_{q=1}^p (r_1 r_2)^q e^{ik\delta_q} \left( 1 - \frac{\delta_q}{r_q} \right) \right\} A_i \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \quad (1.4)$$

donde  $\exp(ikr_0)/r_0$  es la onda esférica que proviene de la fuente  $S$  y llega a  $P(x,y,z)$  sin haber sufrido reflexiones.

Dado que la intensidad transmitida se define como:

$$I_t = A_t A_t^* = |A_t|^2, \quad (1.5)$$

entonces

$$I_t = (t_1 t_2)^2 \sum_{q,m=0}^p (r_1 r_2)^{m+q} e^{ik(\delta_q - \delta_m)} \left( 1 - \frac{\delta_q}{r_q} \right) \left( 1 - \frac{\delta_m}{r_m} \right) I_i \quad (1.6)$$

donde  $I_i = A_i A_i^* = |A_i|^2$ .

Además, si se coloca un medio de registro fotográfico en el plano  $y$ - $z$  a una distancia  $x$  del interferómetro, la ecuación (1.6) da cuenta del perfil de intensidad almacenado, que permitirá, al ser analizado microdensitométricamente, corroborar experimentalmente el análisis teórico desarrollado.

#### I-4.1 ANALISIS DE CASOS LIMITES

Se demostrará en esta sección que la ecuación (1.1) reproduce los casos límites ya conocidos:

- a)  $\alpha=0$  y  $n_1=n_2=n_3$  ;
- b)  $\alpha=0$  ,  $n_1 \neq n_2$  y  $n_1=n_3$  ;
- c)  $\alpha \neq 0$  y  $n_1=n_2=n_3$  ,

y que éstos pueden analizarse separadamente.

a) Cuando  $\alpha=0$  y  $n_1=n_2=n_3=n$  , la diferencia de camino óptico se reduce a

$$\delta_p = 2pn \frac{(x+\rho)h}{\sqrt{(x+\rho)^2+y^2+z^2}} \quad (1.7)$$

Si el punto de observación está en el infinito, se obtiene:

$$\delta_p = 2pnh \left\{ 1 - \frac{\rho \cos(\theta)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\} \cos(\theta) \quad \text{para } x \gg \rho \quad (1.8)$$

$$\text{y } \delta_p = 2pnh \cos(\theta) \quad \text{para } x \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

$$\text{con } \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad .$$

Estos resultados corresponden a los bien conocidos anillos concéntricos de un Fabry-Perot alineado cuyo perfil se muestra en la Figura I.2(a).

b) Cuando  $\alpha=0$  ,  $n_1 \neq n_2=n'$  y  $n_1=n_3=n$  , la diferencia de camino óptico es:

$$\delta_p = 2ph \left\{ \frac{n'(x+\rho)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{(y^2+z^2)(n'^2-n^2)}{n'\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\} \quad (1.10)$$

y en el caso en que  $x \gg \rho$  y  $\rho / \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ll 1$  resulta

$$\delta_p = 2ph \left\{ n' \cos(\theta) + \frac{(n'^2-n^2) \text{sen}^2(\theta)}{n' \cos(\theta)} \right\} \quad (1.11)$$

Ahora bien, si la observación se hace en una posición cerca del eje ( $\text{sen}^2\theta \ll 1$ ), la diferencia de camino óptico tiene la forma:

$$\delta_p = 2phn' \cos(\theta) \quad , \quad (1.12)$$

la que también corresponde a anillos concéntricos.

c) Cuando  $\alpha \neq 0$  y  $n_1 = n_2 = n_3 = n$ , entonces:

$$\delta_p = 2phn \frac{(x+\rho)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{2p\alpha y n \rho}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad , \quad (1.13)$$

y para el caso en que  $x \gg \rho$  se tiene

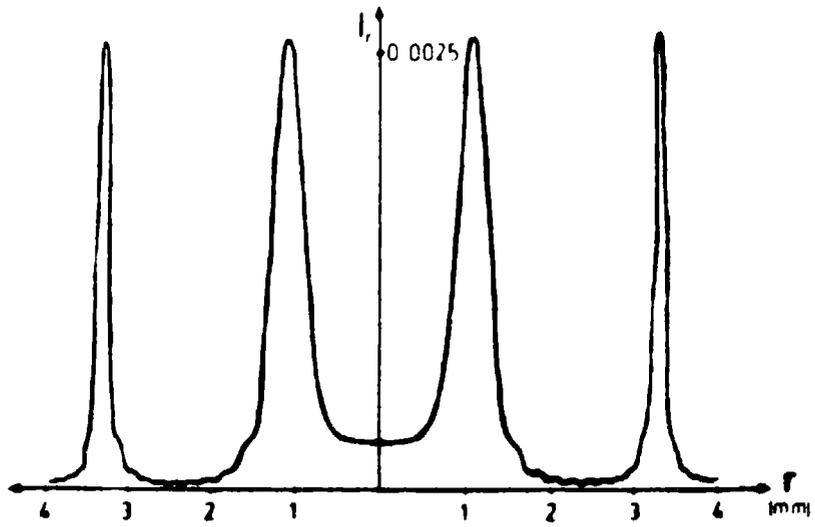
$$\delta_p = 2pn \left\{ h \cos(\theta) + \frac{\alpha y \rho}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\} \left\{ 1 - \frac{\rho \cos(\theta)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\} \quad . \quad (1.14)$$

También se pueden despreciar términos en  $\rho \cos(\theta) / \{x^2+y^2+z^2\}^{1/2}$ , pero en el caso de observación fuera de eje, se debe retener el término  $\alpha y \rho / \{x^2+y^2+z^2\}^{1/2}$ , obteniéndose:

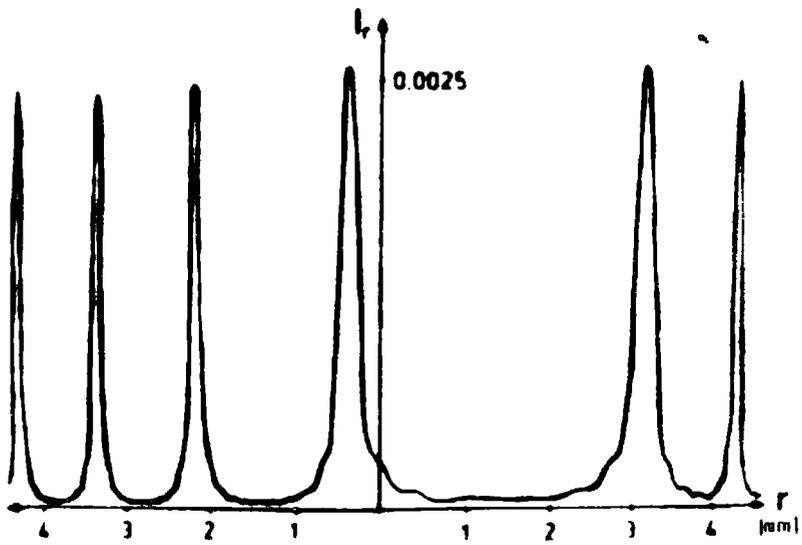
$$\delta_p = 2pn \left\{ h \cos(\theta) + \frac{\alpha y \rho}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\} \quad , \quad (1.15)$$

que corresponde a diagramas de interferencia cuyos perfiles de intensidad tienen simetría solo con respecto al eje z, como se muestra en la Figura I.2(b).

Además, se puede agregar que para el caso de observación cerca del eje ( $y \approx 0$ ) la ecuación (1.15) coincide con la ecuación (1.9), esto significa que una pequeña desalineación del interferómetro no modifica la estructura de los anillos centrales. Lo mismo es válido cuando  $y \approx z \approx 0$  y  $n = n_1 = n_3 \neq n_2 = n'$  en la ecuación (1.1). En este caso, otra vez se obtiene la ecuación (1.9).



(a)



(b)

Figura I - 2

## I-4.2 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los perfiles de intensidad teóricos calculados a partir de la ecuación (1.6) fueron graficados usando una computadora IBM/360 con unidad visual 2250. Tales gráficos fueron comparados con los registros microdensitométricos experimentales obtenidos para valores típicos de los parámetros involucrados.

En la Figura I.3 se puede observar el esquema del montaje experimental usado.

Para simular la fuente puntual de luz  $S$ , se usó un laser de He-Ne continuo de 1.5 mW, y un colimador del haz.

Aquellos con  $n_1=n_3 \neq n_2$  fueron comprobados con un interferómetro de vidrio de 7.6 mm de espesor de caras fijas, y aquellos con  $n_1=n_2=n_3=n$  ( $n$  índice de refracción del aire), con un Fabry-Perot de barrido. Para registrar la figura de interferencia, se usó película ILFORD PAN-F (50 A.S.A.).

Los perfiles de intensidad de los registros fotográficos fueron obtenidos con un comparador microdensitométrico automático Grant.

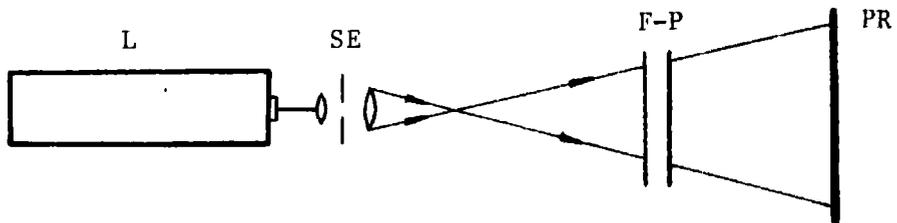
Se observó una adecuada coincidencia entre los perfiles teóricos y experimentales <sup>(9)</sup>.

Las Figuras I.4(a), I.4(b) y I.5(a), I.5(b) reproducen dos ejemplos de tales coincidencias.

Además se analizó la influencia de los cambios en la posición de la fuente puntual (coordenada  $\rho$ ), y el plano de observación (coordenada  $x$ ), en la distribución de intensidad de la figura de interferencia.

La Figura I.5(c) muestra el perfil experimental cuando  $x=300$  mm y  $\rho=\infty$  que puede ser comparado con el trazo de la Figura I.5(b).

La Figura I.5(d) corresponde al perfil experimental cuando  $x=300$  mm y  $\rho=500$  mm que puede confrontarse con las anteriores curvas experimentales.



L : laser  
SE : sistema expensor  
F-P : Fabry-Perot  
PR : placa de registro

Figura I - 3

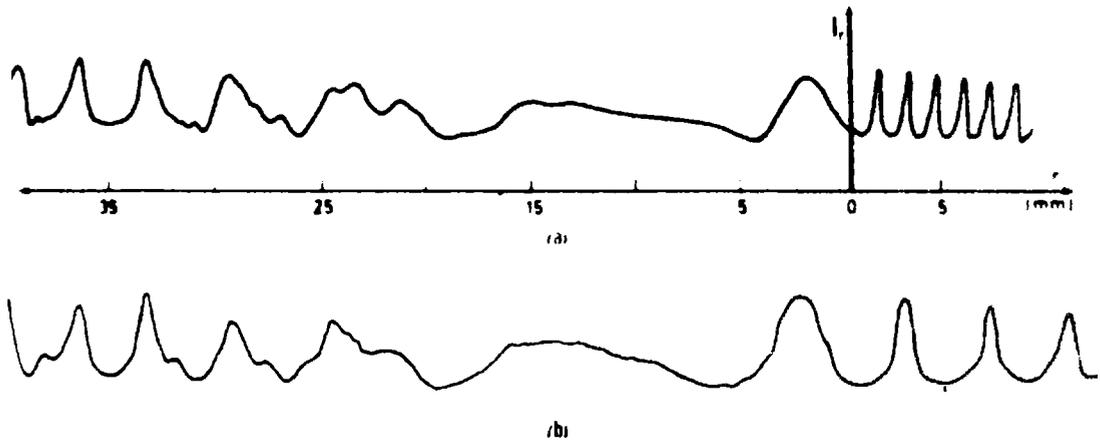


Figura I - 4

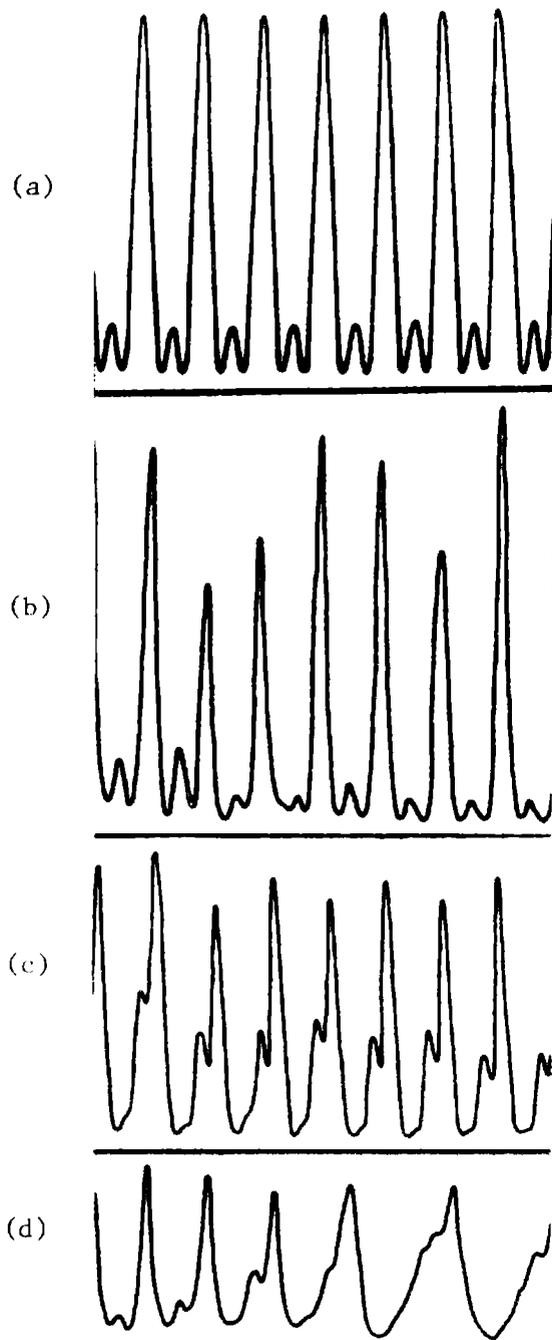


Figura I - 5

## I-5 DIFRACCION A TRAVES DE LOS REGISTROS DE LA FIGURA DE INTERFERENCIA

En esta sección, se detallará el fenómeno de difracción producido cuando un haz de luz incide sobre una pupila  $\mathcal{P}(y_1, z_1)$ , que contiene un registro fotográfico de la figura de interferencia de un Fabry-Perot desalineado.

Siguiendo la teoría escalar de la difracción<sup>(10)</sup>, la distribución de campo se obtiene como solución de las ecuaciones de Maxwell con las condiciones de contorno apropiadas para la pupila. Entonces, teniendo en cuenta las condiciones de linealidad, es posible expresar la función respuesta del sistema  $g_2(y_2, z_2)$  con respecto a una entrada arbitraria  $g_1(y_1, z_1)$ , en términos de su función de Green.

Cuando el sistema óptico es espacio-invariante se puede escribir:

$$g_2(y_2, z_2) = g_1(y_1, z_1) \otimes h(P_2, P_1) \quad (1.16)$$

donde  $\otimes$  indica el producto de convolución y  $h$  denota la función de Green.

En la formulación escalar de Rayleigh-Sommerfeld,  $h$  tiene la forma:

$$h(P_2, P_1) = \frac{\exp(2\pi i |\vec{r}_{21}| / \lambda)}{i\lambda |\vec{r}_{21}|} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21}) \quad (1.17)$$

donde  $h$  es la respuesta impulsiva en  $P_2(y_2, z_2)$  a un rayo que proviene de una fuente puntual luminosa de longitud de onda  $\lambda$ , localizada en  $P_1(y_1, z_1)$  sobre la pupila,  $|\vec{r}_{21}|$  es la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  y  $\vec{n}$  es la normal a la pupila, como se muestra en la Figura I.6.

Cuando el plano  $y_2-z_2$  está suficientemente lejos del plano  $y_1-z_1$ , es válida la aproximación de Fresnel para rayos paraxiales, entonces:

$$h = \frac{\exp(2\pi i / \lambda x)}{i\lambda x} \exp\{(i\pi / \lambda x) [(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]\}. \quad (1.18)$$

Si suponemos que  $g_1(y_1, z_1) = 0$  fuera de la pupila  $\mathcal{P}$ , es posible

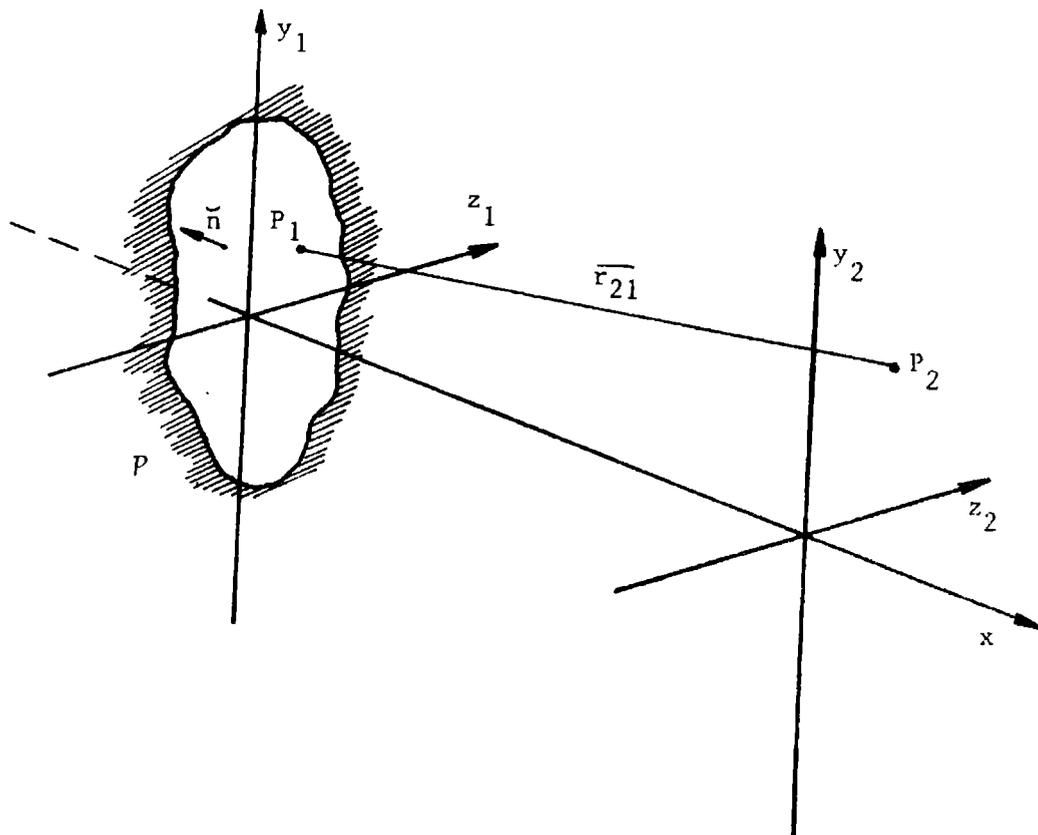


Figura I - 6

escribir la ecuación (1.16) como:

$$g_2(y_2, z_2) = \frac{\exp(2\pi i/\lambda x)}{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y_1, z_1) \exp\{i\pi/\lambda x [(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]\} dy_1 dz_1 \quad (1.19)$$

Se usará esta ecuación para calcular la distribución de campo  $g_2(y_2, z_2)$ , donde  $g_1(y_1, z_1)$  representa a la onda transmitida por una pupila, cuya transmitancia es la del registro fotográfico de la figura de interferencia de un Fabry-Perot desalineado.

Sea  $O_o$  una fuente puntual de luz monocromática de longitud de onda  $\lambda_o$  localizada en  $P_o(x_o, y_o, z_o)$ , T una transparencia localizada en el plano  $x = x_1$ , y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  el punto de observación, como se muestra en la Figura I.7.

La transparencia T, es un registro de la figura de interferencia obtenida con un Fabry-Perot desalineado, y limitado por una pupila  $p^{(11)}$ .

La onda esférica de amplitud  $A_o$  originada en  $P_o$ , produce sobre la pupila un campo incidente

$$A_o \frac{\exp(ik_o r_{10})}{r_{10}}, \quad \text{donde } k_o = \frac{2\pi}{\lambda_o}.$$

Sea  $P(y_1, z_1)$  la función que describe a la pupila  $P$  y  $t(y_1, z_1)$  su función de transmitancia en amplitud; entonces el valor del campo transmitido  $U_1(y_1, z_1)$  inmediatamente después de la pupila es:

$$g_1 \equiv U_1(y_1, z_1) = A_o \frac{\exp(ik_o r_{10})}{r_{10}} P(y_1, z_1) t(y_1, z_1) \quad (1.20)$$

Introduciendo la expresión en la ecuación (1.19), el campo  $g_2 \equiv U_2(y_2, z_2)$  en  $P_2$  resulta :

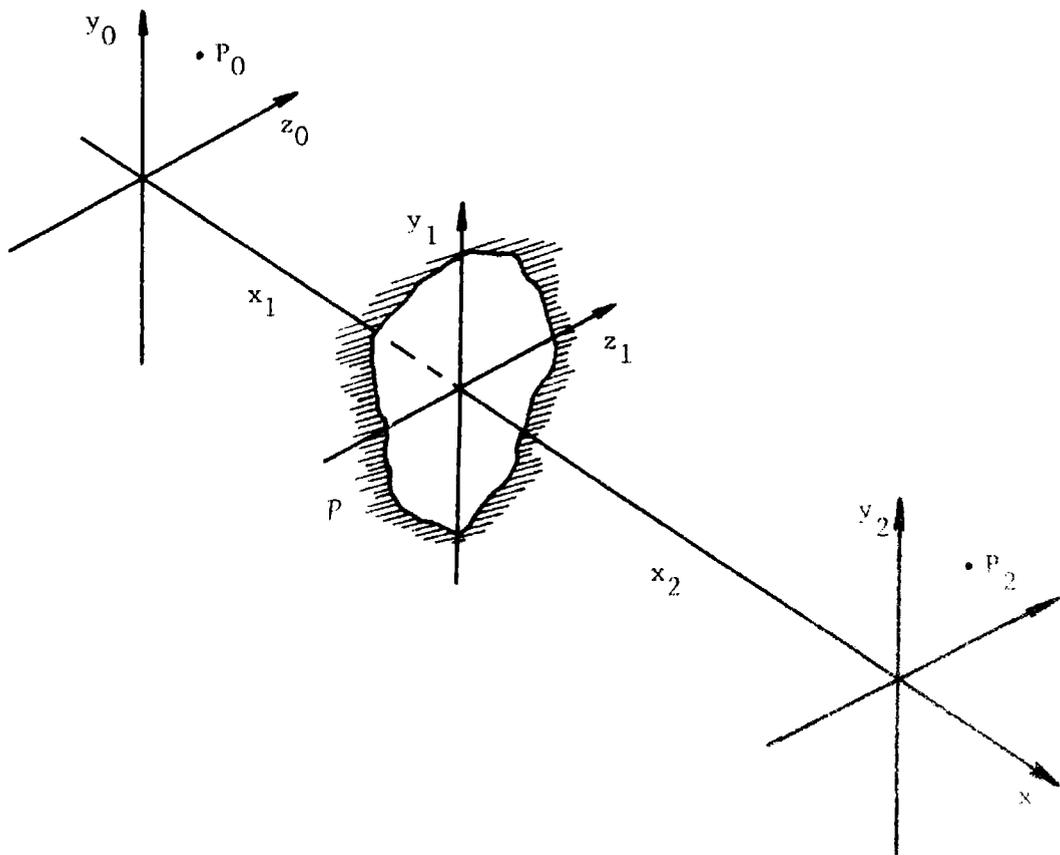


Figura I - 7

$$U_2(y_2, z_2) = Q \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(y_1, z_1) t(y_1, z_1) \exp\{i\Phi(y_1, z_1)\} \exp\{i\Psi(y_1, z_1)\} dy_1 dz_1, \quad (1.21)$$

donde

$$Q = A_0 \frac{e^{i k_0 (x_1 - x_0)}}{i \lambda_0 (x_1 - x_0)} \frac{e^{i k_0 (x_2 - x_1)}}{(x_2 - x_1)} \exp\left\{ \frac{i k_0}{2} \left[ \frac{(y_0^2 + z_0^2)}{(x_1 - x_0)} + \frac{(y_2^2 + z_2^2)}{(x_2 - x_1)} \right] \right\}, \quad (1.21.a)$$

$$\Phi = k_0 \frac{y_1^2 + z_1^2 - 2(y_0 y_1 + z_0 z_1)}{2(x_1 - x_0)}, \quad y$$

$$\Psi = k_0 \frac{y_1^2 + z_1^2 - 2(y_2 y_1 + z_2 z_1)}{2(x_2 - x_1)}.$$

La transmitancia  $t(y_1, z_1)$  de un registro fotográfico revelado en las condiciones usuales de linealidad tiene, en general, la forma:

$$t(y_1, z_1) = t_0 + \beta I_t \quad (1.22)$$

donde las constantes  $t_0$  y  $\beta$  dependen de la emulsión fotosensible considerada, del tiempo de exposición y del proceso de revelado; e  $I_t$  es la distribución de intensidad transmitida a través del interferómetro cuando la figura de interferencia fue registrada.

Para el caso particular de un Fabry-Perot de aire ( $n_1 = n_2 = n_3 = n$ ) desalineado ( $\alpha \neq 0$ ), se obtuvo, para la diferencia de camino óptico la expresión (1.13).

Si se considera ahora que  $(x+\rho)^2 \gg y^2 + z^2$  (aproximación paraxial), se puede escribir:

$$\delta_p \approx 2pn \left\{ h(x+\rho) + \alpha py \right\} \left\{ 1 - \frac{y^2 + z^2}{2(x+\rho)^2} \right\} \frac{1}{(x+\rho)}, \quad (1.23)$$

y, despreciando el término  $\alpha\rho y(y^2+z^2)/2(x+\rho)^3$ , se obtiene:

$$\delta_p \approx 2pnh \left\{ 1 - \frac{y^2+z^2}{2(x+\rho)^2} \right\} + 2pn\rho\alpha \left\{ \frac{y}{(x+\rho)} \right\} \quad (1.24)$$

De tal forma que la transmitancia  $t(y_1, z_1)$  estará dada por:

$$t(y_1, z_1) = \beta I_i (t_1 t_2)^2 \sum_{q,m=0}^p \Delta(r_1 r_2)^{m+q} \exp\left\{ 2ikn(q-m) \left[ h - \frac{h(y_1^2+z_1^2)}{2(x+\rho)^2} + \frac{\alpha\rho y_1}{(x+\rho)} \right] \right\} + t_o \quad (1.25)$$

donde  $\Delta = (1 - \delta_q/r_q)(1 - \delta_m/r_m)$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  con  $\lambda$  longitud de onda de la fuente que dio origen al diagrama de interferencia y  $x$  es la distancia del interferómetro al plano de registro fotográfico.

Es posible transformar la doble suma de la ecuación (1.25) obteniéndose:

$$t(y_1, z_1) = \beta I_i (t_1 t_2)^2 \frac{R^{p+1}}{(R^2 - 1)} \left\{ (R^{p+1} - R^{-(p+1)}) + \sum_{s=1}^p \Delta (R^{p-s+1} - R^{-p+s-1}) (e^{isk\delta} + e^{-isk\delta}) \right\} + t_o \quad (1.26)$$

donde

$$s = q-m$$

$$R = r_1 r_2$$

$$y \quad \delta = 2n \left\{ h - h \frac{y_1^2 + z_1^2}{2(x+\rho)^2} + \frac{\alpha\rho y_1}{(x+\rho)} \right\}$$

Entonces, de acuerdo a (1.21) el campo  $U_2(y_2, z_2)$  a una distancia  $x_2$  de la transmitancia se expresa como

$$U_2(y_2, z_2) = Q \{ t_0 + \beta I_i(t_1 t_2) \}^2 \frac{R^{p+1}}{R^2 - 1} \{ (R^{p+1} - R^{-(p+1)}) L_1 + \sum_{s=1}^p \Delta (R^{p-s+1} - R^{-p+s-1}) (e^{2iknsh} L_{2_s} + e^{-2iknsh} L_{2_{-s}}) \} \quad , \quad (1.27)$$

donde:

$$L_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(y_1, z_1) \exp\{i(A_1 y_1^2 + B_1 y_1)\} \exp\{i(A_1 z_1^2 + B_1' z_1)\} dy_1 dz_1 \quad (1.28)$$

$$A_1 = \frac{k_0}{2} \left\{ \frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} \right\} \quad ,$$

$$B_1 = -k_0 \left\{ \frac{y_0}{x_1 - x_0} + \frac{y_2}{x_2 - x_1} \right\} \quad y \quad B_1' = -k_0 \left\{ \frac{z_0}{x_1 - x_0} + \frac{z_2}{x_2 - x_1} \right\} \quad ,$$

y

$$L_{2_s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(y_1, z_1) \exp\{i(A_{2_s} y_1^2 + B_{2_s} y_1)\} \exp\{i(A_{2_s} z_1^2 + B_{2_s}' z_1)\} dy_1 dz_1 \quad (1.29)$$

con

$$A_{2_s} = A_1 - \frac{knsh}{(x+\rho)^2} \quad y \quad B_{2_s} = B_1 + \frac{2nshk\rho}{(x+\rho)} \quad .$$

Se verá a continuación cuál es el significado físico de la ecuación (1.27).

Recordando que un interferómetro de Fabry-Perot de caras paralelas da, de un objeto puntual,  $p$  imágenes del mismo (siendo  $p$  el número máximo de reflexiones) todas ubicadas en una misma línea recta; si se considera ahora que las caras del interferómetro forman entre sí un pequeño ángulo  $\alpha$ , por un razonamiento análogo, de un objeto puntual, se generan  $p$  imágenes que yacen sobre una circunferencia de radio  $\ell$  con centro en  $\Omega$ , sucesivamente separadas una distancia angular  $2\alpha$ , como se muestra en la Figura I.8. Dicha circunferencia está en el plano que contiene a la normal a la cara  $E_1$ , a la fuente  $O_0$  y es normal a la arista de la cuña.

Esto indica, que se puede interpretar al fenómeno de interferencia producido cuando un Fabry-Perot desalineado es iluminado por una fuente puntual, como análogo al que surge de la interferencia de  $(p+1)$  fuentes puntuales idénticas, dispuestas sobre tal circunferencia.

Del análisis de la expresión (1.28) se desprende que si  $A_1 = 0$ , entonces  $L_1$  representa la transformada de Fourier de la pupila, lo que permite deducir que en  $x_2 = x_0$ , el segundo término de (1.27) da la fuente de reconstrucción vista a través del diagrama de interferencia.

Para cada valor de  $s$  de la ecuación (1.29) es posible elegir el plano  $x_2$  de tal forma que  $A_{2s} = 0$ . Entonces en ese plano,  $L_{2s}$  será la transformada de Fourier de la pupila. La condición  $A_{2s} = 0$  implica:

$$\frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{2knsh}{k_0(x+\rho)^2} \quad (1.30)$$

que es la ecuación de una lente de distancia focal :

$$F_s = \frac{k_0(x+\rho)^2}{2knsh} \quad (1.31)$$

Los factores  $B_{2s}$  y  $B'_1$  determinan las frecuencias espaciales de enfoque de las sucesivas imágenes, en el plano en el que se satisface (1.30).

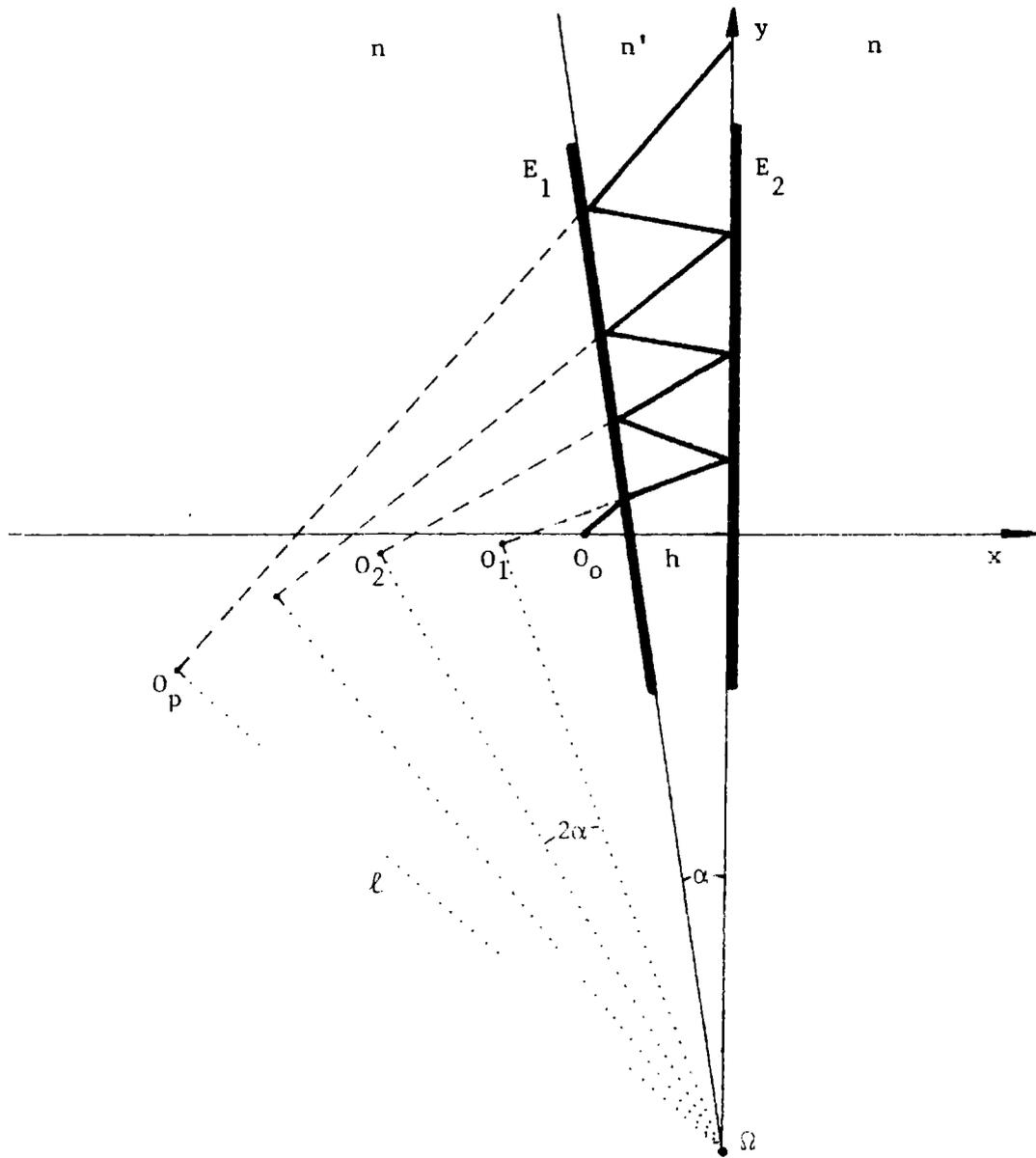


Figura I - 8

Este análisis es también válido para los términos  $L_{2-s}$ . La condición que se debe cumplir para que  $L_{2-s}$  sea la transformada de Fourier de la apertura, es  $A_{2-s} = 0$  y, los puntos  $x'_2$  para los que dicha condición se cumple son, con respecto a la placa, simétricos de los puntos  $x_2$ .

Entonces, el fenómeno de difracción observado en el diagrama de anillos de interferencia de un Fabry-Perot desalineado, puede interpretarse como producido por lentes con distancias focales

$$F_s = \pm \frac{k_o (x+\rho)^2}{2knsh} .$$

I-6 HOLOGRAFIA UTILIZANDO UN INTERFEROMETRO DE FABRY-PEROT DESALINEADO:  
CASO COHERENTE

Cuando un objeto es iluminado con luz coherente y monocromática y la luz dispersada por el objeto, incide sobre una placa fotográfica habiendo pasado a través de un interferómetro de Fabry-Perot desalineado, el efecto producido por el interferómetro, es similar a la existencia simultánea de (p+1) objetos iguales cuyas amplitudes son proporcionales una a otra y cuyas fases difieren una de la otra en  $(2\pi/\lambda)\delta$ , donde  $\delta$  es la diferencia de camino óptico.

Si  $A_n$  es la amplitud del campo incidente en la placa, correspondiente a la n-ésima imagen del objeto original, el campo total sobre la placa será:

$$\sum_{n=0}^p A_n \quad , \quad (1.32)$$

donde, si suponemos al objeto como formado por N fuentes puntuales, por el principio de superposición,  $A_n$  será la suma de las amplitudes de todas las fuentes que forman la n-ésima imagen del objeto. Por lo tanto, la expresión (1.32) se puede reescribir como

$$\sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^p A_{jn} \quad . \quad (1.33)$$

Entonces, la intensidad registrada estará de acuerdo a la (1.5), expresada por

$$I = \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{n=0}^p |A_{jn}|^2 + \sum_{\substack{n,q=0 \\ n \neq q}}^p A_{jn} A_{jq}^* \right\} + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \sum_{n,q=0}^p A_{jn} A_{kq}^* \quad . \quad (1.34)$$

Reemplazando la (1.34) en la (1.22) e iluminando al registro con un campo B, en el proceso de reconstrucción, el campo a la salida será:

$$U_2 = B.t \quad . \quad (1.35)$$

Suponiendo que la onda de reconstrucción tenga la misma amplitud y fase que aquélla generada por uno de los objetos, por ejemplo  $B = A_{mq}$ , la ecuación del campo tendrá la forma:

$$U_2 = (t_o + \beta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N |A_{jq}|^2) A_{mq} + \beta |A_{mq}|^2 \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^P A_{jn} + 2\beta A_{mq} \sum_{\substack{j,k=1 \\ k \neq m}}^N \sum_{\substack{n,d=0 \\ q \neq d}}^P A_{jn} A_{kd}^* . \quad (1.36)$$

Se ve que el primer término, es proporcional al campo incidente, el segundo término reconstruye un campo proporcional al generado por cada objeto  $O_{jn}$  y el tercero corresponde a la interferencia entre diferentes objetos.

I-7 DIFRACCION A TRAVES DE LOS REGISTROS DE LA FIGURA DE INTERFERENCIA  
 GENERADA POR UN CONJUNTO DE FUENTES PUNTUALES ESPACIALMENTE INCOHERENTES

En esta sección, se discute el fenómeno de difracción, cuando la pupila  $P(y_1, z_1)$  contiene un registro fotográfico de la figura de interferencia de un Fabry-Perot desalineado, producida por  $N$  fuentes puntuales espacialmente incoherentes y monocromáticas <sup>(12)</sup>.

Para el caso particular de un Fabry-Perot desalineado de aire, se obtiene la siguiente expresión para la diferencia de camino óptico de la  $j$ -ésima fuente puntual

$$\delta_{p_j} = 2pnh \left\{ 1 - \frac{(y-\xi_j)^2 + (z-\eta_j)^2}{2(x + \rho_j)^2} \right\} + 2pn\alpha\rho_j \frac{(y-\xi_j)}{(x+\rho_j)}, \quad (1.37)$$

donde  $(-\rho_j, \xi_j, \eta_j)$  son las coordenadas de la fuente  $O_j$  como se ve en la Figura I.9.

La intensidad observada en el plano de registro dada por la  $j$ -ésima fuente será:

$$I_{t_j} = (t_1 t_2)^2 \sum_{q,m=0}^p R^{m+q} \exp\{ik(\delta_{q_j} - \delta_{m_j})\} \left(1 - \frac{\delta_{q_j}}{r_{q_j}}\right) \left(1 - \frac{\delta_{m_j}}{r_{m_j}}\right) I_{i_j}, \quad (1.38)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$  y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz cuya intensidad  $I_{i_j}$  fue usada en el proceso de registro.

Teniendo en cuenta que las  $N$  fuentes puntuales son espacialmente incoherentes, la intensidad en el plano de registro vale:

$$I_t = \sum_{j=1}^N I_{t_j}. \quad (1.39)$$

De acuerdo a la (1.22), la transmitancia del registro fotográ-

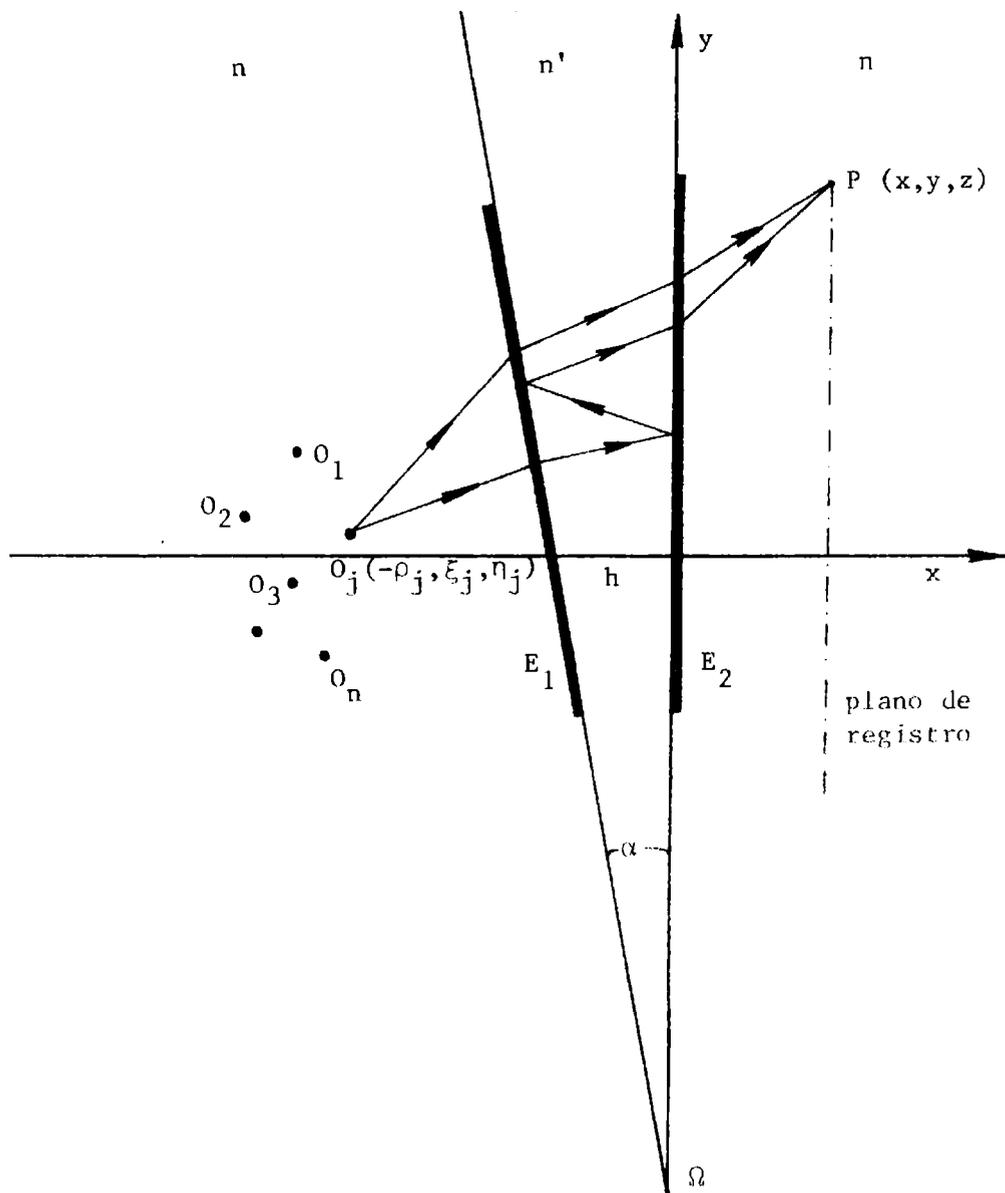


Figura I - 9

fico revelado puede ser escrita como:

$$t = t_0 + \beta \sum_{j=1}^N I_{t_j} \quad . \quad (1.40)$$

Siguiendo los lineamientos de la Sección I-5, el campo  $U_2(y_2, z_2)$  en el plano de reconstrucción es igual a:

$$U_2(y_2, z_2) = Q \left\{ t_0 + \beta (t_1 t_2)^2 \frac{R^{p+1}}{R^2 - 1} \{ R^{p+1} - R^{-(p+1)} \} \sum_{j=1}^N I_{ij} \right\} L_1 + \\ + Q \beta (t_1 t_2)^2 \frac{R^{p+1}}{R^2 - 1} \sum_{j=1}^N I_{ij} \sum_{s=1}^p (R^{p-s+1} - R^{-p+s-1}) (e^{s L_{2_{s_j}}} + e^{-s L_{2_{-s_j}}}) , \quad (1.41)$$

donde  $Q, L_1, A_1, B_1, B'_1$  corresponden a las ecuaciones (1.21.a) y (1.28) y tienen idéntico significado físico,  $s_j = q_j - m_j$  y

$$L_{2_{s_j}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(y_1, z_1) \exp\{i(A_{2_{s_j}} y_1^2 + B_{2_{s_j}} y_1)\} \exp\{i(A'_{2_{s_j}} z_1^2 + B'_{2_{s_j}} z_1)\} dy_1 dz_1 \quad (1.42)$$

con

$$A_{2_{s_j}} = A_1 + \frac{skhn}{(x+\rho_j)^2} ,$$

$$B_{2_{s_j}} = B_1 + 2nsk \left\{ \frac{h\xi_j}{(x+\rho_j)^2} + \frac{\alpha\rho_j}{(x+\rho_j)} \right\} ,$$

$$B'_{2_{s_j}} = B'_1 + \frac{2nkh\eta_j}{(x+\rho_j)^2} ,$$

y

$$e_s = \exp \left\{ 2i \pi n k \left[ h - \frac{\xi_j^2 \eta_j^2}{2(x+\rho_j)^2} - \frac{\alpha \rho_j \xi_j}{(x+\rho_j)} \right] \right\} .$$

Los términos en  $L_{2s_j}$  y  $L_{2-s_j}$  para la  $j$ -ésima fuente pueden ser interpretados como los términos en  $L_{2s}$  y  $L_{2-s}$  de la Sección I-5.

I-8 POSICION Y MAGNIFICACION DE LAS IMAGENES EN EL CASO DE ILUMINACION INCOHERENTE

Las coordenadas de los focos en el plano en que  $A_{2_{s_j}} = 0$  se obtienen al hacer nulos los coeficientes  $B_{2_{s_j}}$  y  $B'_{2_{s_j}}$ . De tal forma se pueden calcular:

$$Y_{2_{s_j}} = 2 \frac{(x_{2_{s_j}} - x_1)}{k_o} \left\{ 2n\sigma k \left[ \frac{h\xi_j}{(x+\rho_j)^2} + \frac{\alpha\rho_j}{(x+\rho_j)} \right] - \frac{k_o}{2} \frac{y_o}{(x_1-x_o)} \right\}, \quad (1.43)$$

y

$$Z_{2_{s_j}} = \frac{(x_{2_{s_j}} - x_1)}{k_o} \left\{ \frac{2n\sigma k h \eta_j}{(x+\rho_j)^2} - \frac{k_o z_o}{(x_1-x_o)} \right\}, \quad (1.44)$$

donde los subíndices  $s$  y  $j$  representan al  $s$ -ésimo término de la  $j$ -ésima fuente puntual objeto.

Variaciones en las coordenadas de la fuente de reconstrucción  $(\Delta y_o, \Delta z_o)$  darán como resultado, variaciones en las coordenadas de la imagen, de la siguiente manera:

$$\Delta y_{2_{s_j}} = \frac{x_{2_{s_j}} - x_1}{x_1 - x_o} \Delta y_o \quad \text{y} \quad \Delta z_{2_{s_j}} = \frac{x_{2_{s_j}} - x_1}{x_1 - x_o} \Delta z_o \quad (1.45)$$

Entonces, el diagrama de Fabry-Perot desalineado, se comporta como una lente cuya magnificación para la  $j$ -ésima fuente es

$$M_{s_j} = \left| \frac{x_{2s_j} - x_1}{x_1 - x_0} \right| \quad . \quad (1.46)$$

Por otro lado, variaciones  $\Delta\xi_j$  y  $\Delta\eta_j$  de las coordenadas de la fuente objeto  $(\xi_j, \eta_j)$ , producen variaciones de las coordenadas focales dadas por:

$$\Delta y_{2s_j} = \frac{x_{2s_j} - x_1}{(x + \rho_j)^2} \cdot \frac{(2nsh)}{k_0} \Delta\xi_j \quad , \quad (1.47)$$

$$\Delta z_{2s_j} = \frac{x_{2s_j} - x_1}{(x + \rho_j)^2} \cdot \frac{(2nsh)}{k_0} \Delta\eta_j \quad .$$

Entonces, las imágenes reconstruidas tendrán una magnificación:

$$M_{s_j} = \left| \frac{\Delta y_{2s_j}}{\Delta\xi_j} \right| = \left| \frac{\Delta z_{2s_j}}{\Delta\eta_j} \right| = \frac{x_{2s_j} - x_1}{(x + \rho_j)^2} 2nsh \left( \frac{k}{k_0} \right) \quad . \quad (1.48)$$

La expresión (1.48) y la condición  $A_{2s_j} = 0$ , implican que el registro interferométrico se comporta como una sucesión de lentes de distancia focal:

$$F_{s_j} = \frac{k_0}{k} \frac{(x + \rho_j)^2}{2nsh} \quad ,$$

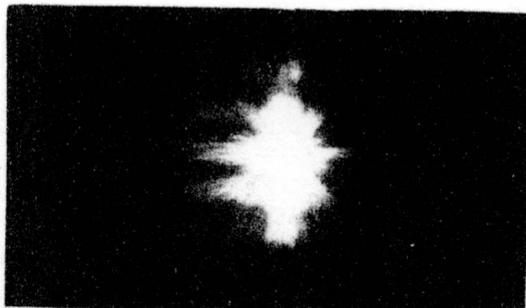
con magnificación dada por la (1.48).

## I-9 RESULTADOS EXPERIMENTALES.CASO INCOHERENTE.

Fueron realizadas varias experiencias con el objeto de probar estos resultados teóricos.

Se registraron hologramas imagen interferométricos de una viga empotrada en voladizo, iluminada con una fuente de sodio extensa, espacialmente incoherente no monocromática. El interferómetro de Fabry-perot fue colocado dentro de una cámara fotográfica convencional de 35mm cargada con película holográfica Kodak 649-F. Las Figuras I.10(a) y I.10(b) muestran reproducciones positivas de las imágenes virtual y real respectivamente, reconstruidas con una fuente puntual de luz blanca.

(a)



(b)



Figura I - 10

Se resumirá una comparación entre los procesos holográficos coherente e incoherente:

En ambos casos, la ecuación que describe la distribución de campo en la etapa de reconstrucción, consta de una parte que es proporcional al campo incidente, otra que provee la reconstrucción de un campo proporcional al generado por los  $N$  objetos  $O_{j_n}$ ; y los restantes términos, son ruido de fondo que surge de la interferencia entre la luz proveniente de las diferentes fuentes puntuales  $O_j$  y sus imágenes por reflexión, en el caso coherente, y de la interferencia que ocurre solamente entre la luz de las diferentes imágenes de la misma fuente puntual, y para cada fuente puntual en el caso incoherente.

Como consecuencia de la presencia de estos términos de ruido, la eficiencia de difracción es baja comparada con la holografía convencional.

## REFERENCIAS

1. Meissner, K.W., "Interference Spectroscopy. Part I.", J.O.S.A. 31, p.405 (1941). Part II, J.O.S.A. 32, p.185 (1942).
2. Sears, J.E. and Barrell, H., "Fundamental Standards of Length in Terms of Wavelength of Light", Roy. Soc. Phil. Trans. 233, A 723, p.p. 143-216, June 22 (1934).
3. Connes, P., "Increase of the Product of Luminosity and Resolving Power of Interferometers by Using a Path Difference Independent of the Angle of Incidence", Revue d'optique 35, p.37 (1956).
4. Born, M. and Wolf, E., "Principles of Optics", Pergamon Press, London, (1959).
5. Brossel, J., "Multiple Beam Localized Fringes. I. Intensity Distribution and Localizations. II. Conditions of Observation and Formations of Ghosts", Proc. Phys. Soc. (59), p.p. 224-42, (1947).
6. Aebischer, N., "Calculs de Profils Dissymétriques Observables Sur Des Figures D'Interférences en Ondes Multiples Sphériques", Nouv. Rev. d'optique Appliquée 2, N°6, p.p. 351-366 (1971).
7. Zerbino, L.M., Tesis Doctoral, Universidad Nacional de La Plata (1978).
8. Zerbino, L.M. y Garavaglia, M., "Distribución de Intensidad en Figuras de Interferencia por Reflexiones Múltiples. Parte I", Reunión Nacional de Física, Villa Giardino, Argentina (1979).
9. Rodríguez, N., Torroba, R., Zerbino, L.M. y Garavaglia, M., "Distribución de Intensidad en Figuras de Interferencia por Reflexiones Múltiples. Parte II.", Reunión Nac. de Física, Villa Giardino, Argentina (1979).
10. Goodman, J.W., "Introduction to Fourier Optics", McGraw Hill, New York, (1968).
11. Zerbino, L.M., Rabal, H.J. y Garavaglia M., "A Compact Device for Interferometric Holography", Proc. of Optics, Photonics and Ionics Engineering Meeting, (OPIEM'79), Strasbourg, France (1979).
12. Rodríguez, N., Torroba, R., Zerbino, L. y Garavaglia, M., "A Compact Device for Incoherent Holography", enviado para su publicación al J.O.S.A..

## CAPITULO II

- II.1            Introducción.
- II.2            Cavidades interferométricas de superficies no planas.
- II.3            Cavidad interferométrica de superficies parabólicas  
                  confocales.
- II.4            Cálculo de la diferencia de camino óptico.
- II.5            Cálculo del perfil de interferencia de un interferómetro  
                  de caras parabólicas.Modo 1.
- II.6            Cálculo del perfil de interferencia de un interferómetro  
                  de caras parabólicas.Modo 2.

## II-1 INTRODUCCION

En este capítulo se presenta el estudio del fenómeno de interferencia producido por cavidades ópticas de superficies reflectoras no planas.

En particular, se analiza el caso en que dichas superficies sean parabólicas en disposición confocal, calculándose la diferencia de camino óptico entre un rayo que se transmite sin reflejarse y otro que ha sufrido un cierto número de reflexiones, siguiendo los lineamientos generales de la Sección I.2.

Se toman en cuenta para este nuevo interferómetro, sólo dos formas de iluminación: i) fuente puntual en el infinito, ii) fuente puntual en el foco común a ambas superficies. Para este último caso, sólo se presentará una expresión para la intensidad transmitida.

## II-2 CAVIDADES INTERFEROMETRICAS DE SUPERFICIES NO PLANAS

Las figuras de interferencia producidas cuando un haz de luz sufre reflexiones múltiples entre dos superficies curvas parcialmente reflectantes (esféricas, por ejemplo) dependen, no sólo de la geometría de la cavidad con ellas formada, sino también de la posición relativa de la fuente utilizada para iluminarlas; en analogía con las cavidades de superficies planas tratadas en el Capítulo I.

Esta clase de resonadores ha sido ampliamente tratada, desde el punto de vista de cavidades activas. Esta orientación surgió con el advenimiento del láser<sup>(1,2)</sup>.

En el año 1961, Kogelnik y T. Li<sup>(3)</sup>, definieron las llamadas curvaturas normalizadas o parámetros  $g$  de una cavidad como:

$$g_1 = 1 - \frac{e}{R_1} \quad \text{y} \quad g_2 = 1 - \frac{e}{R_2}$$

siendo  $R_1$  y  $R_2$  los radios de curvatura de los espejos y  $e$  la separación entre los mismos.

Así, cualquier resonador, está representado por un punto en el plano  $g_1$ - $g_2$ , como muestra la Figura II.1.

Este esquema está dividido en dos regiones, donde, la zona sombreada que está definida por la condición analítica  $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$ , caracteriza a los resonadores llamados ESTABLES, mientras que el resto del diagrama caracteriza a los llamados INESTABLES.

Por otro lado, un resonador óptico puede ser visto como un sistema de enfoque periódico, en el cual un rayo que se propaga entre los espejos, tendrá su trayectoria periódicamente redirigida por las dos superficies curvas. Se ve entonces, que cualquier sistema de enfoque periódico que yazca dentro de la zona sombreada, es estable en el sentido de que el desplazamiento transversal de la trayectoria de un rayo, oscilará periódicamente, pero permanecerá confinado después de muchos pasajes, y

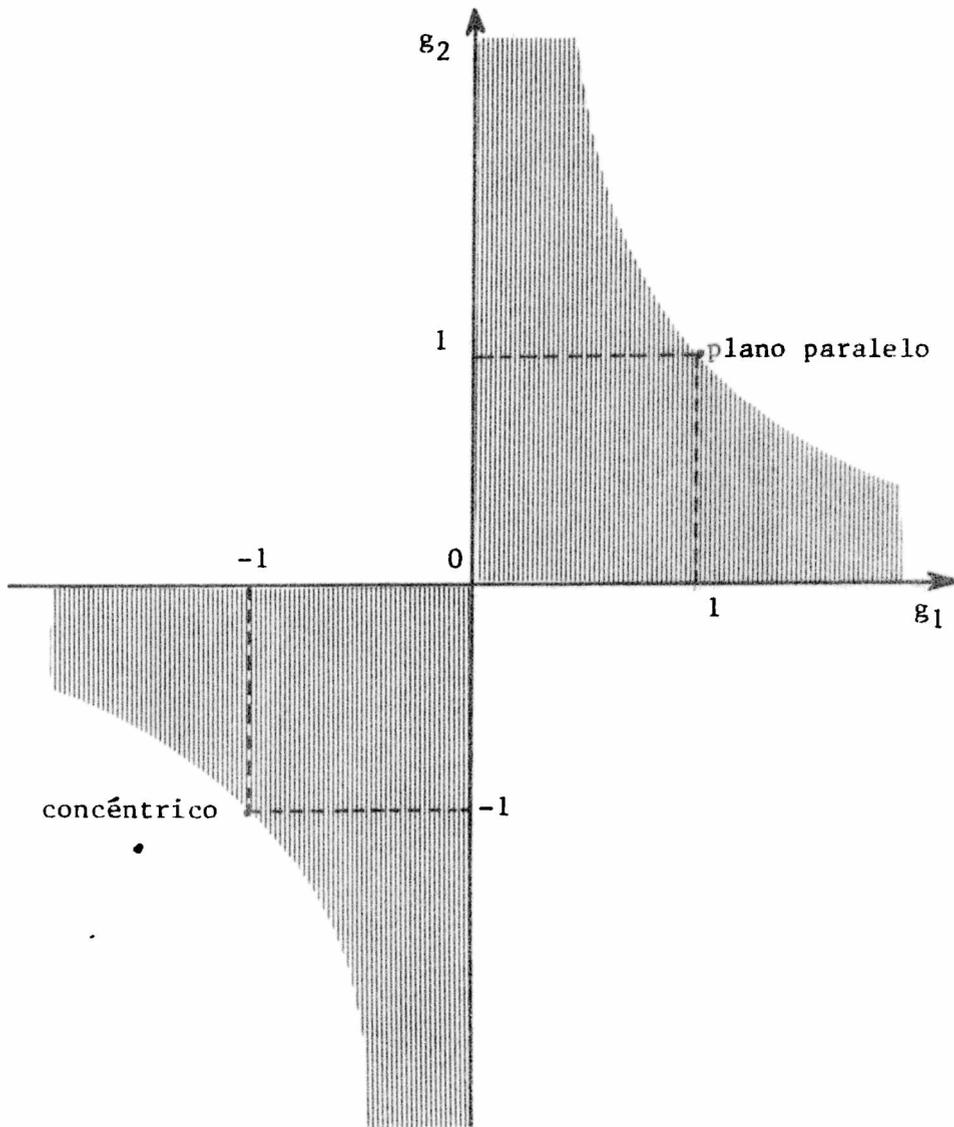


Figura II - 1

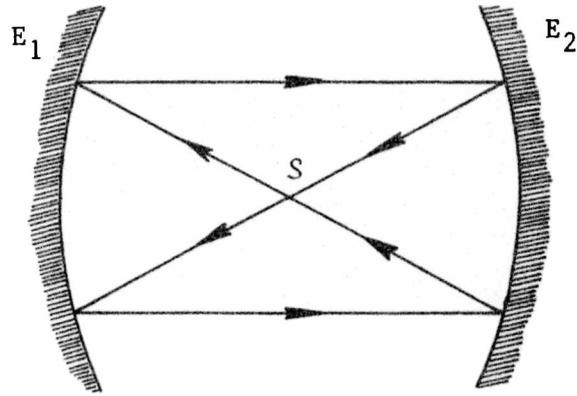
si tal sistema está localizado en la región de inestabilidad, tendrá soluciones divergentes de las ecuaciones que gobiernan los desplazamientos transversales de un rayo.

De acuerdo a este razonamiento, se pueden distinguir dos casos extremos. Una cavidad de espejos planos enfrentados tal como el Fabry-Perot, está en uno de los límites impuestos por la condición de estabilidad, ya que  $g_1 = g_2 = 1$ . El restante, es el interferómetro de Connes<sup>(4)</sup>, que consiste de dos espejos esféricos de igual radio de curvatura y sus focos coinciden ; para el cual,  $g_1 = g_2 = 0$ .

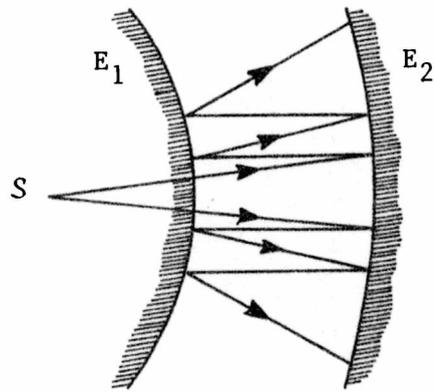
Un tratamiento similar, para resonadores ópticos pasivos permite decir que en los casos en que las superficies parcialmente reflectantes estén dispuestas de manera tal que sus puntos focales coincidan, existe la posibilidad de ubicar la fuente luminosa de forma que los rayos emitidos por ella que sufran múltiples reflexiones, se enfoquen sucesivamente en los mismos puntos y además recorran una trayectoria que se repita periódicamente, como se muestra en la Figura II.2(a).

Por otra parte, si la cavidad confocal es como la que se ve en la Figura II.2(b), la fuente luminosa puede ser ubicada de modo que los rayos, después de sufrir múltiples reflexiones, se enfoquen sucesivamente en los mismos puntos, pero su trayectoria no se repita.

La idea es estudiar esta última clase de cavidad analizando el diagrama de interferencia por ella producido.



( a )



( b )

Figura II - 2

## II-3 CAVIDAD INTERFEROMETRICA DE SUPERFICIES PARABOLICAS CONFOCALES

Para estudiar el comportamiento interferométrico de una cavidad confocal de superficies esféricas parcialmente reflectantes enfrentadas, es necesario, en primer lugar, hacer un trazado de rayos. Con este propósito se distinguirán dos modos de iluminación, como se muestra en la Figura II.3, donde por simplicidad se ha supuesto que los índices de refracción de los medios involucrados son iguales.

En la disposición confocal, el espaciado entre los vértices de las superficies parcialmente reflectoras es

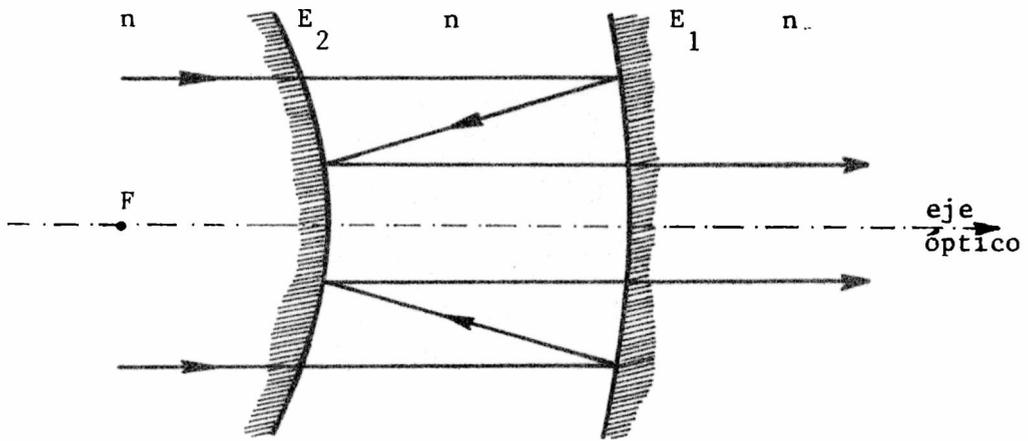
$$e = f_2 - f_1 \quad , \quad (2.1)$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son las distancias focales de las superficies  $E_1$  y  $E_2$  respectivamente.

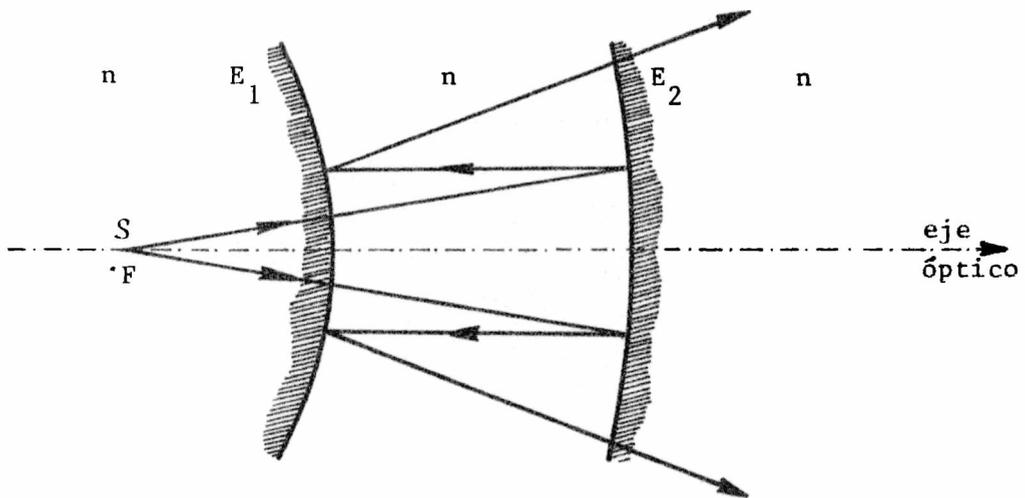
En el Modo 1 de la Figura II.3 , se presenta el caso en que la fuente puntual que ilumina al sistema, se encuentra sobre el eje óptico de la cavidad, a una distancia de la misma muy grande comparada con el espaciado entre sus vértices. Esto permite decir que el sistema es iluminado por ondas planas de amplitud constante, cuyo vector de propagación es paralelo al eje óptico de la cavidad.

El fenómeno físico que se produce se puede explicar sencillamente como sigue: la onda plana que llega al interferómetro es parcialmente reflejada por la superficie  $E_2$  en dirección a su foco, sufriendo una nueva reflexión debido a la presencia de  $E_1$  , que por la configuración del sistema, da lugar a una nueva onda plana paralela al eje óptico del interferómetro. Este ciclo se repite periódicamente un cierto número de veces, estando limitado por la reflectividad de los espejos.

En el Modo 2 (ver Figura II.3) , la fuente puntual de iluminación está ubicada en el foco del sistema, en este caso, el proceso de múltiples reflexiones es inverso al descrito para el Modo 1, dando lugar a que la onda transmitida por el interferómetro sea una onda esférica divergente des-



Modo 1



Modo 2

Figura II - 3

de el foco de la cavidad.

Pero este análisis, para ambos casos, haciendo uso de espejos esféricos, es válido sólo en la aproximación paraxial. Por lo tanto, si se quiere obtener una diferencia de camino óptico exacta (más allá de los límites impuestos por la aproximación paraxial), se hace necesario modificar la geometría de las superficies reflectantes. Por este motivo, fueron elegidos espejos parabólicos ya que admiten como exactos, a los trazados de rayos esquematizados para los Modos 1 y 2.

## II-4 CALCULO DE LA DIFERENCIA DE CAMINO OPTICO

Para hacer el cálculo de la diferencia de camino óptico, es conveniente tener presentes algunas propiedades de las parábolas.

Como se sabe, la ecuación de una parábola con origen de coordenadas en su vértice es

$$y^2 = 4fx \quad , \quad (2.2)$$

donde  $f$  denota su distancia focal medida desde el origen de coordenadas.

Esta figura geométrica se caracteriza porque la distancia desde un punto cualquiera de ella a su foco, es igual a la distancia desde dicho punto a la directriz (ver Figura II.4). Esto se puede expresar como

$$\overline{FA} = \overline{AM} = x + f \quad . \quad (2.3)$$

En el caso de un interferómetro de espejos parabólicos confocales, la diferencia de camino óptico entre un rayo que pasa por él sin desviarse y uno que ha sufrido una reflexión, arrivando ambos al mismo punto de observación  $P(x,y,z)$  es, entonces, para el Modo 1 y según muestra la Figura II.5(a) , igual a:

$$\delta = n \{ \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DP} - ( \overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DP} ) \} \quad , \quad (2.4)$$

donde  $n$  es el índice de refracción de los medios, o sea:

$$\delta = \{ \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{EC} \} n \quad . \quad (2.5)$$

Un análisis geométrico elemental, permite reescribir a la (2.5) en la forma:

$$\delta = n \{ e - x_B + x_A + \overline{FB} - \overline{FC} - x_A + x_C \} \quad . \quad (2.6)$$

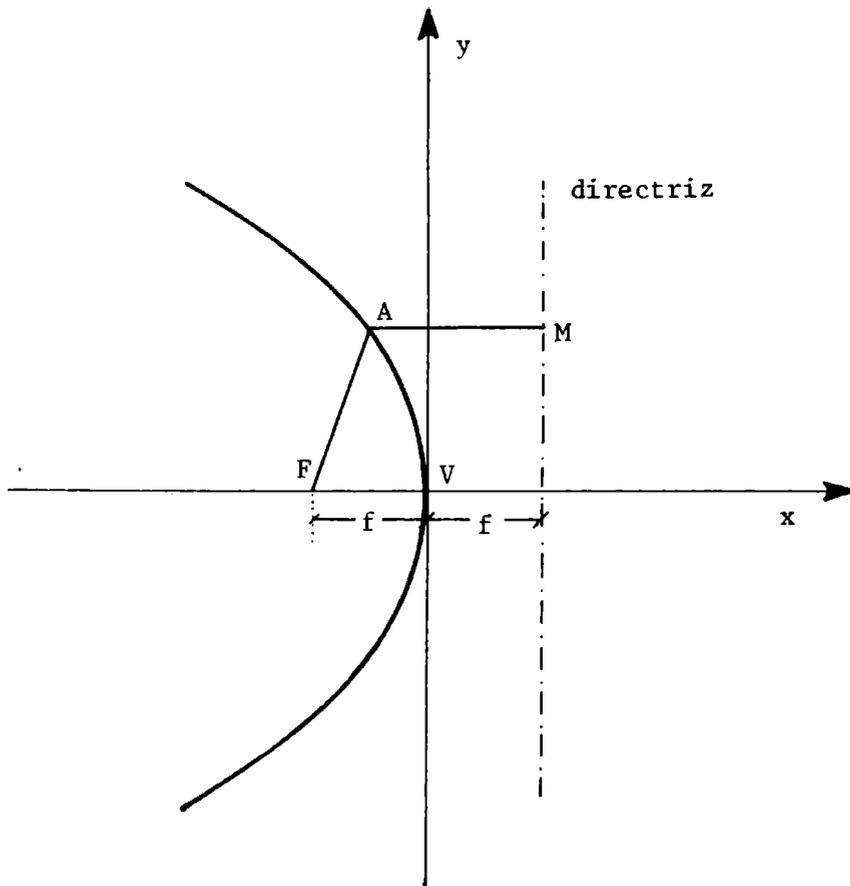
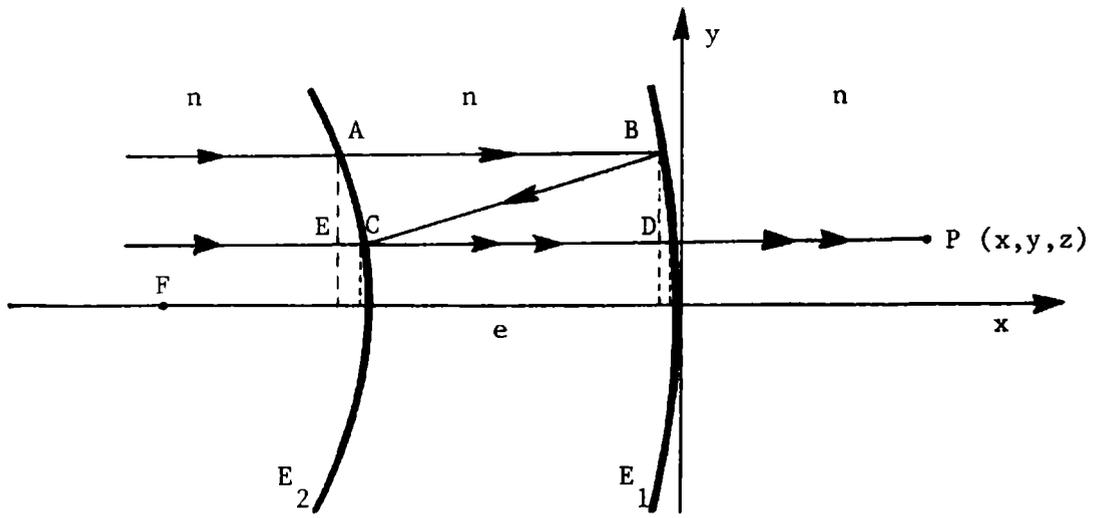
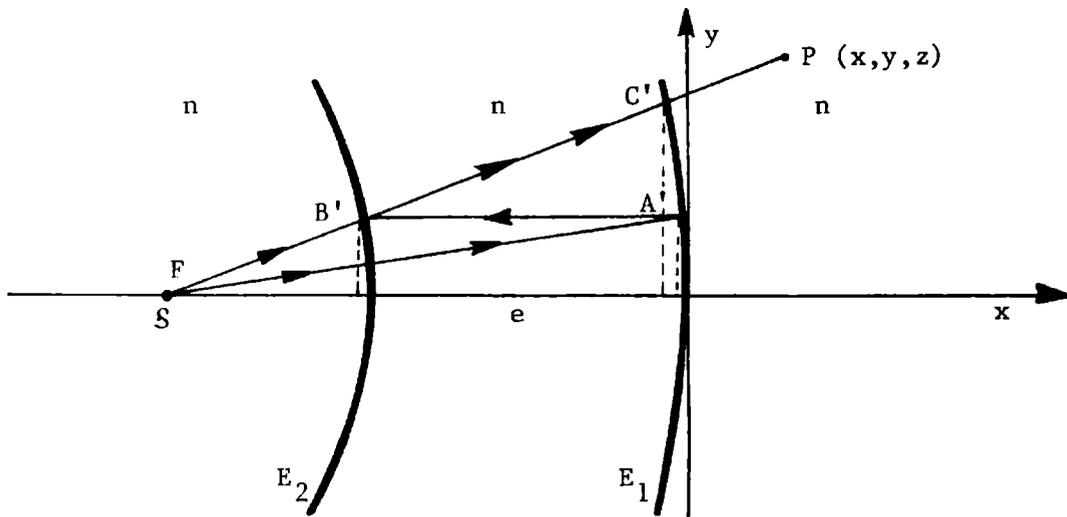


Figura II - 4



( a )



( b )

Figura II - 5

Es importante notar que en esta expresión, las coordenadas  $x_A$ ,  $x_B$  y  $x_C$  son medidas como distancias positivas, desde los vértices de las parábolas a las que ellas pertenecen.

Mediante la relación (2.3)

$$\overline{FB} = x_B + f_2 \quad , \quad (2.7)$$

$$\overline{FC} = x_C + f_1 \quad ,$$

y teniendo en cuenta la ecuación (2.1), entonces se encuentra que:

$$\delta = 2ne \quad . \quad (2.8)$$

Generalizando, para el caso en que se desee calcular la diferencia de camino óptico entre un rayo que pasa sin reflejarse y uno que se ha reflejado  $p$  veces, basta con observar que para cada reflexión se suma una longitud de camino dada por (2.8) , por lo tanto , $\delta$  es:

$$\delta_p = 2npe \quad . \quad (2.9)$$

Un razonamiento similar es aplicable al cálculo de la diferencia de camino óptico para el Modo 2 (ver Figura II.5(b)), el que también conduce a la ecuación (2.9).

Es interesante notar, que para esta cavidad interferométrica, bajo estas dos condiciones de iluminación, la ecuación (2.9) muestra una dependencia lineal de  $\delta_p$  con el número  $p$  de reflexiones, donde la constante de linealidad es proporcional a la separación entre los vértices de las superficies, y además no depende de las coordenadas del punto de observación.

II-5 CALCULO DEL PERFIL DE INTERFERENCIA DE UN INTERFEROMETRO DE CARAS PARABOLICAS.MODO 1.

La expresión (2.9) permite obtener la diferencia de fase entre rayos, de acuerdo a (1.2).Por lo tanto:

$$\Phi_p = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_p \quad ,$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz incidente.

Si sobre el interferómetro incide una onda plana uniforme de amplitud constante  $A_i$  , la amplitud transmitida, de acuerdo a lo expuesto en la Sección II-3 , resulta ser una superposición de ondas planas.Entonces el campo resultante tiene la forma

$$A_t = A_i t_1 t_2 e^{i\Phi_0} + A_i t_1 t_2 r_1 r_2 e^{i\Phi_1} + A_i t_1 t_2 (r_1 r_2)^2 e^{i\Phi_2} + \dots + A_i t_1 t_2 (r_1 r_2)^p e^{i\Phi_p} \quad , \quad (2.10)$$

siendo  $t_1, t_2$  y  $r_1, r_2$  las transmitividades y reflectividades de los espejos  $E_1$  y  $E_2$  , respectivamente.

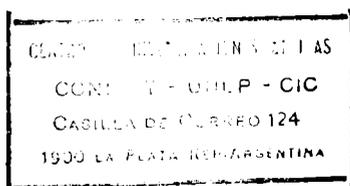
Dada la forma lineal de  $\delta_p$  con el número de reflexiones, se puede expresar a  $\Phi_p$  como:

$$\Phi_p = p\phi \quad , \quad (2.11)$$

siendo  $\phi = (4\pi/\lambda)ne$  .En consecuencia la ecuación (2.11) se puede escribir de la forma:

$$A_t = t_1 t_2 \{ 1 + r_1 r_2 e^{i\phi} + (r_1 r_2)^2 e^{i2\phi} + \dots + (r_1 r_2)^p e^{ip\phi} \} A_i \quad , \quad (2.12)$$

lo que es equivalente a :



$$A_t = t_1 t_2 A_i \sum_{n=0}^p (r_1 r_2)^n e^{in\phi} . \quad (2.13)$$

Esta expresión es una serie geométrica que permite obtener para la amplitud de la luz transmitida por el interferómetro, la siguiente relación

$$A_t = t_1 t_2 A_i \left\{ \frac{1 - R^{p+1} e^{i(p+1)\phi}}{1 - R e^{i\phi}} \right\} , \quad (2.14)$$

con  $R = r_1 r_2$  .

Así, la intensidad transmitida, de acuerdo a (1.5), vale:

$$I_t = \frac{(1 - R^{p+1})^2 + 4R^{p+1} \text{sen}^2[(p+1)\phi/2]}{(1 - R)^2 + 4R \text{sen}^2[\phi/2]} (t_1 t_2)^2 I_i , \quad (2.15)$$

donde  $I_i = A_i A_i^*$  .

Cabe señalar que esta distribución de intensidad es idéntica a la que se obtiene a la salida de un interferómetro de Lummer-Gehrcke<sup>(5)</sup> .

Analizando el caso límite en que  $p \rightarrow \infty$ , se encuentra, para la intensidad transmitida, la forma:

$$I_t = \frac{(t_1 t_2)^2}{(1 - R)^2 + 4R \text{sen}^2[\phi/2]} I_i , \quad (2.16)$$

la que reproduce al bien conocido perfil de intensidad de Airy.

Estos resultados no son para nada sorprendentes, si se analiza el hecho de que la diferencia de camino óptico dada por (2.9) es exactamente la misma que se obtiene para un interferómetro de Fabry-Perot de caras paralelas, iluminado por una onda plana de amplitud constante bajo incidencia normal.

Por la misma razón, es lógico decir que esta nueva cavidad, en la condición de iluminación especificada, tendrá las mismas posibilidades de aplicación que brindan, tanto un interferómetro de Fabry-Perot, como un interferómetro de Lummer-Gehrcke.

Como por ejemplo, en semejanza con el Fabry-Perot, puede ser operado en el llamado MODO FILTRO, donde aquí, la variación de la diferencia de camino óptico se puede producir por cambios en el índice de refracción del medio, dado que el espaciado entre las superficies reflectoras se debe mantener constante debido al requerimiento de confocalidad.

II-6 CALCULO DEL PERFIL DE INTERFERENCIA DE UN INTERFEROMETRO DE CARAS PARABOLICAS.MODO 2.

Recordando que en el Modo 2 la fuente puntual de iluminación se encuentra en el foco del sistema, en esta sección, es necesario hacer un tratamiento análogo al anterior, pero teniendo en cuenta que incidirán ondas esféricas.

Bajo estas condiciones, la amplitud transmitida por el interferómetro, y observada en un punto  $P(x_o, y_o, z_o)$  a la salida, es:

$$A_t = A_i t_1 t_2 \frac{e^{ikr_o}}{r_o} + A_i t_1 t_2 R \frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \dots + A_i t_1 t_2 R^p \frac{e^{ikr_p}}{r_p} \quad , \quad (2.17)$$

la que puede ser expresada como:

$$A_t = A_i t_1 t_2 \sum_{q=0}^p R^q \frac{e^{ikr_q}}{r_q} \quad , \quad (2.18)$$

donde  $R = r_1 r_2$  ,  $k = 2\pi/\lambda$  y  $r_q$  denota al camino recorrido por la onda esférica que partiendo del foco del sistema (origen de coordenadas), arriba al punto  $P(x_o, y_o, z_o)$  después de haber sufrido  $q$  reflexiones. Pero como la diferencia de camino óptico entre esta última onda y una que llega al mismo punto de observación sin haberse reflejado nunca es:

$$\delta_q = r_q - r_o \quad , \quad (2.19)$$

la que por la (2.9), resulta:

$$\delta_q = 2nqe \quad , \quad (2.20)$$

entonces, el factor  $e^{ikr_q}$  se puede expresar como el producto  $e^{ik\delta_q} e^{ikr_o}$ .

Así, la ecuación (2.18) se transforma en :

$$A_t = A_i t_1 t_2 \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \sum_{q=0}^p R^q \frac{r_0}{r_q} \exp(2iknqe) \quad , \quad (2.21)$$

o bien, aplicando (2.18) y (2.19) en :

$$A_t = A_i t_1 t_2 \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \sum_{q=0}^p R^q \frac{r_0 \exp(ik2nqe)}{(2nqe + r_0)} \quad , \quad (2.22)$$

donde  $r_0 = \{ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \}^{1/2}$  .

La intensidad transmitida es, en base a la ecuación (1.5) igual a:

$$I_t = (t_1 t_2)^2 \sum_{q=0}^p \frac{R^q}{(2nqe + r_0)} \exp(ik2nqe) \sum_{j=0}^p \frac{R^j}{(2nje + r_0)} \exp(-ik2nje) \quad . \quad (2.23)$$

Desarrollando las sumas y reacomodando términos se obtiene:

$$I_t(x_0, y_0, z_0) = I_i (t_1 t_2)^2 \sum_{q=0}^{p-|j|} \sum_{j=-p}^p \frac{R^{2q+|j|} \cos k2nje}{(2nqe + r_0)(2n(q+|j|)e + r_0)} \quad , \quad (2.24)$$

donde  $I_i$  es la intensidad de la onda incidente.

## REFERENCIAS

1. Fox, A.G. and Li, T. Resonant Modes in a Maser Interferometer, Bell Sys. Tech. J., Vol. 40, March 1961
2. Boyd, G. and Gordon, J.P., Confocal Multimode Resonator for Millimeter Through optical wavelength Masers, Bell. Sys. Tech. J., Vol. 40, March 1961
3. Kogelnik, H. and Li, T., Laser Beams and Resonators, Appl. Opt., Vol. 5 N° 10, October 1966
4. Connes, P., Rev. d'Opt., Vol. 35, 1956
5. Born, M. and Wolf, E., Principles of Optics, Pergammon Press, New York, 1970

## CAPTULO III

- III-1        Introducción.
- III-2        Cavidad interferométrica de superficies parabólicas:  
              Caso general ( $n \neq n'$ ) .
- III-3        Cálculo de la nueva diferencia de camino óptico.
- III-4        Perfil de interferencia
  - III-4.1 - Cálculo de la intensidad transmitida.
  - III-4.2 - Análisis del diagrama de interferencia.

### III-1. INTRODUCCION

En este Capítulo se tratará la generalización de lo expuesto en el Capítulo II, haciendo un análisis de la diferencia de camino óptico, al introducirse aditamentos corretores con el objeto de materializar al modo uno, cuando  $n \neq n'$ .

El cálculo de la diferencia de camino óptico lleva a la obtención de la figura de interferencia, respuesta del nuevo interferómetro a la incidencia de una onda plana uniforme.

Dicho diagrama de interferencia es contrastado con la teoría de las placas zonales, estableciéndose ciertas analogías con ellas.

### III-2 CAVIDAD INTERFEROMETRICA CON SUPERFICIES PARABOLICAS:

#### CASO GENERAL ( $n' \neq n$ )

En el Capítulo II, la teoría desarrollada supone la igualdad de los índices de refracción de los medios ópticos involucrados. Pero, si el interferómetro es construido con un material de índice de refracción  $n'$  distinto al del aire, que es el medio en el cual generalmente se coloca la fuente de iluminación, habrá que tener en cuenta la refracción de la onda incidente, debido a su pasaje de un medio a otro. Como consecuencia la onda incidente en el espejo  $E_2$  no satisfará las condiciones iniciales de iluminación prevista para el trazado de rayos formulado en la Sección II-2. Entonces para que mantenga su validez la expresión (2.9) para la diferencia de camino óptico, se hace necesaria la introducción de ciertos dispositivos correctores.

De aquí en más, sólo se tratará el comportamiento de la cavidad según la configuración definida como Modo 1 recordando que se trata de aquella disposición en la cual la fuente de iluminación está en el infinito.

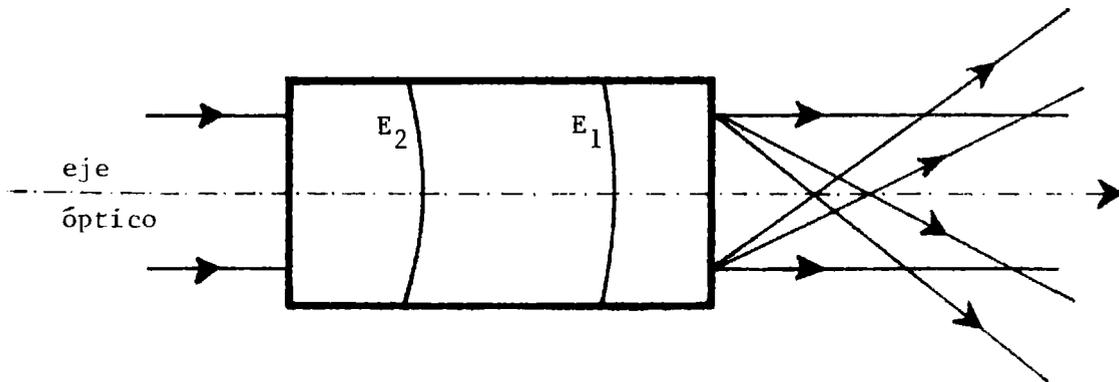
Con este propósito, si se adosa al espejo  $E_2$  del interferómetro, un dióptrico plano-parabólico, de espesor  $e'$  en el eje, cuyo radio de curvatura sea igual al radio de curvatura de dicho espejo, con índice de refracción  $n'$ , y la cara plana perpendicular al eje óptico del sistema, se verifica, en la condición de iluminación con onda plana bajo incidencia normal, que no se produce desviación de dicha onda, por el cambio de medio óptico, conservando entonces su dirección original al incidir sobre el espejo  $E_2$ . Si se tiene en cuenta que la figura de interferencia calculada para este modo es la generada por una superposición de ondas planas; el cambio de índice de refracción a la salida del interferómetro afectará la estructura de dichas ondas.

Resulta lógico entonces, el agregado de un segundo dióptrico, para este caso parabólico-plano, de características similares al anterior de espesor  $e''$  en el eje, con la salvedad de que su radio de curvatura sea igual al del espejo  $E_1$ .

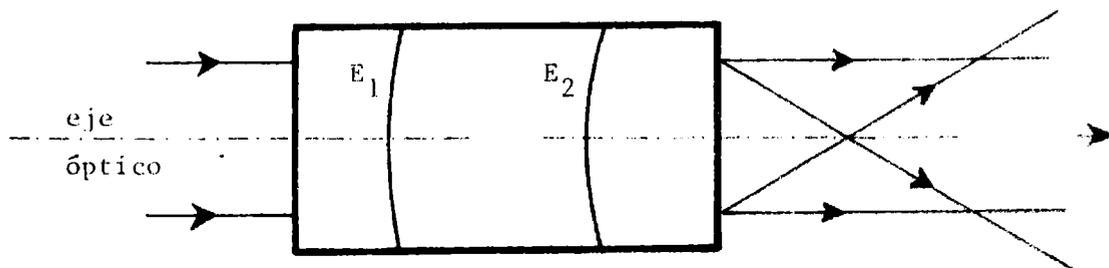
Con esta nueva cavidad interferométrica así formada, se observa experimentalmente, que las superficies planas de los dióptricos agregados introducen reflexiones adicionales y por lo tanto alteran la estructura del diagrama de interferencia antes calculado. Como consecuencia, en este caso, la salida consta, como puede verificarse en la Figura III.1(a) , de la superposición de las ondas planas originales y de ondas esféricas (una por cada reflexión adicional) , que se enfocan sucesivamente sobre el eje óptico de la cavidad.

Si por otra parte, el interferómetro es iluminado por una onda plana que incida normalmente en sentido opuesto al anterior, se verifica a la salida la existencia de ondas planas y una única onda esférica, como muestra la Figura III.1(b).

En lo que sigue, se analizará en detalle esta última disposición. Para ello, es necesario hacer el trazado de rayos correspondiente sin tener en cuenta, de todas las reflexiones posibles, aquellas que no contribuyan a la onda esférica emergente.



( a )



( b )

Figura III - 1

### III-3 CALCULO DE LA NUEVA DIFERENCIA DE CAMINO OPTICO.

Sea una onda plana de amplitud constante, que incide paralela al eje óptico de la cavidad. Un rayo tal como  $L_0$  directamente transmitido y otro como  $L_1$  que ha sufrido una reflexión en la cara plana posterior y una en la superficie  $E_2$  arribando ambos al mismo punto de observación  $P(x_p, y_p, z_p)$ , como se ve en la Figura III.2, tendrán una diferencia de camino óptico dada por

$$\delta' = (\overline{ED} + \overline{DG})n' + (\overline{GP} - \overline{NP})n \quad (3.1)$$

donde  $n'$  y  $n$  son los índices de refracción de los medios ópticos.

Recordando que  $e'$  es el espesor del dióptrico plano parabólico en el eje, y teniendo en cuenta que el rayo  $L_1$  incide a una distancia  $y_D = y_E$  al eje óptico, con su respectiva coordenada  $x_D$  dada a través de la ecuación de la parábola, resulta

$$\overline{ED} = e' - x_D \quad (3.2)$$

donde  $e'$  y  $x_D$  representan distancias tomadas positivas.

Con la construcción de la recta auxiliar  $\overline{DF}$  (ver Figura III-2), siendo  $\overline{VF} = f_2$  la distancia focal del espejo  $E_2$ , se encuentra que:

$$\overline{DF} = \overline{DG} + \overline{GF} \quad (3.3)$$

que, por la ecuación (2.7) se puede reescribir en la forma:

$$\overline{DG} = f_2 + x_D - \overline{GF} \quad (3.4)$$

Con el objeto de expresar a la distancia  $\overline{DG}$  en función de los parámetros característicos del sistema, se pueden relacionar por los crite-

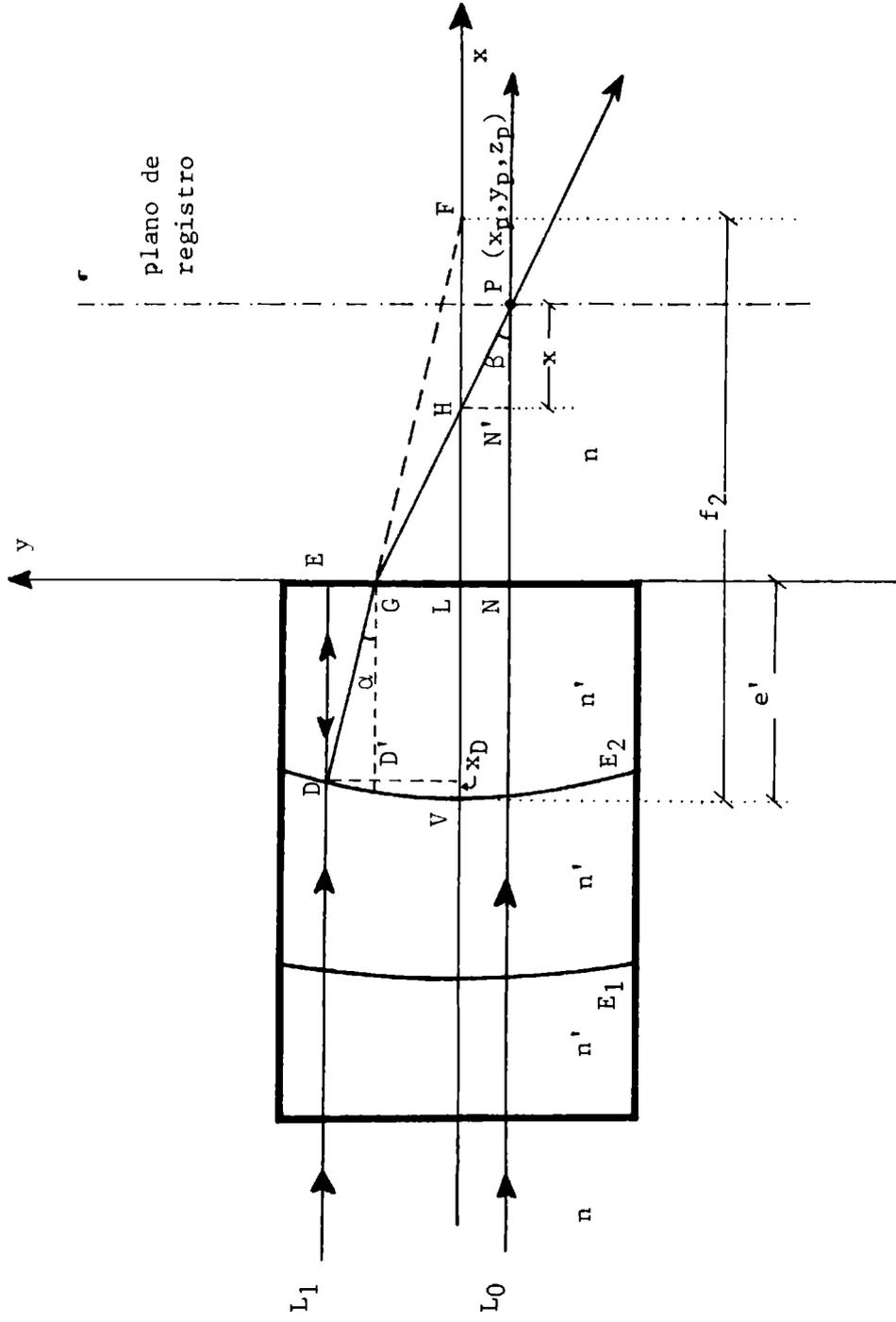


Figura III - 2

rios de semejanza, los triángulos  $\triangle GFL$  y  $\triangle DGD'$ , de manera tal que se cumple:

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{LF}}{\overline{D'G}} \quad ; \quad (3.5)$$

pero de la Figura III.2 se verifica que el segmento  $\overline{LF} = f_2 - e'$  y que  $\overline{D'G} = e' - x_D$ , por lo tanto, reemplazando en la (3.5), y usando la (3.4) se tiene:

$$\overline{DG} = \frac{(f_2 + x_D)(e' - x_D)}{(f_2 - x_D)} \quad . \quad (3.6)$$

Entonces, el primer término de la ecuación (3.1) será:

$$n' \left[ (e' - x_D) + \frac{(f_2 + x_D)(e' - x_D)}{f_2 - x_D} \right] = 2n'f_2 \frac{(e' - x_D)}{f_2 - x_D} \quad . \quad (3.7)$$

Definiendo al segmento  $\overline{NP}$  como la coordenada  $x$  del punto de observación  $P(x_p, y_p, z_p)$ , en donde el sistema de coordenadas ha sido centrado en el eje de la cavidad, con origen en la cara plana de salida; sólo resta tener una expresión para el segmento  $\overline{GP}$  para obtener la diferencia de camino óptico buscada.

Si  $H$  es el punto de convergencia al eje de la onda esférica emergente del sistema interferométrico, y  $\overline{LH}$  es la distancia desde dicho punto al sistema de coordenadas  $x$ - $y$ - $z$ , es fácil ver que por simples consideraciones de la óptica geométrica:

$$\overline{LH} = \frac{n}{n'} (f_2 - e') \quad (3.8)$$

Además, por la semejanza entre los triángulos  $\hat{GPN}$  y  $\hat{GHL}$ , se verifica:

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{LH}} = \frac{\overline{GP}}{\overline{NP}} \quad . \quad (3.9)$$

Recordando que  $\overline{NP} = x_p$  y, por la ecuación (3.8), se obtiene

$$\overline{GP} = \frac{n'}{n} x_p \frac{\overline{GH}}{f_2 - e'} \quad , \quad (3.10)$$

pero a su vez el segmento  $\overline{GP}$  se puede expresar como

$$\overline{GP} = \overline{GH} + \overline{HP} \quad , \quad (3.11)$$

donde  $\overline{HP} = \sqrt{(x_p - \overline{LH})^2 + y_p^2 + z_p^2}$ , entonces

$$\overline{GH} = \frac{n'}{n} \frac{(f_2 - e')}{x_p - n(f_2 - e')} \sqrt{[x_p - (n/n')(f_2 - e')]^2 + y_p^2 + z_p^2} \quad . \quad (3.12)$$

Reemplazando la (3.12) en la (3.11), se encuentra que

$$\overline{GP} = \frac{n' x_p}{n' x_p - n(f_2 - e')} \sqrt{[x_p - (n/n')(f_2 - e')]^2 + y_p^2 + z_p^2} \quad . \quad (3.13)$$

Por lo tanto, el segundo término de la ecuación (3.1) será:

$$n x_p \left\{ \frac{n'}{n' x_p - n(f_2 - e')} \sqrt{[x_p - (n/n')(f_2 - e')]^2 + y_p^2 + z_p^2} - 1 \right\} \quad . \quad (3.14)$$

De esta forma, la diferencia de camino óptico dada por la (3.1) puede ser expresada según las (3.7) y (3.14) de la forma:

$$\delta' = \frac{2n'f_2(e'-x_D)}{(f_2-x_D)} + nx_p \left\{ \frac{n'}{n'x_p - n(f_2 - e')} \sqrt{[x_p - (n/n')(f_2 - e')]^2 + y_p^2 + z_p^2} - 1 \right\} \quad (3.15)$$

Sin embargo, el objetivo es encontrar una expresión para  $\delta'$  que dependa sólo de las coordenadas del punto de observación y de los parámetros propios del sistema interferométrico (espesores, índices de refracción y distancias focales). Se debe, entonces, encontrar la relación explícita entre la distancia  $x_D$  y dichos parámetros. Para ello, si se tiene en cuenta que

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{y_D}{f_2 + x_D},$$

y

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\sqrt{y_p^2 + z_p^2}}{\sqrt{[x_p - (n/n')(f_2 - e')]^2 + y_p^2 + z_p^2}}, \quad (3.16)$$

los que se relacionan a través de la segunda ley de Snell, la que establece:

$$n' \text{sen}(\alpha) = n \text{sen}(\beta) \quad , \quad (3.17)$$

se arriba a la siguiente relación:

$$\frac{n'y_D}{f_2 + x_D} = \frac{n\sqrt{y_p^2 + z_p^2}}{\sqrt{[x_p - (n/n')(f_2 - e')]^2 + y_p^2 + z_p^2}}, \quad (3.18)$$

y como  $y_D^2 = 4f_2 x_D$  por ser  $E_2$  una superficie parabólica, resulta entonces:

$$x_D = f_2 \left\{ \left[ \frac{2An'^2}{n^2(y_p^2 + z_p^2)} - 1 \right] - \sqrt{\left[ \frac{2An'^2}{n^2(y_p^2 + z_p^2)} - 1 \right]^2 - 1} \right\}, \quad (3.19)$$

con

$$A = [x_p - (n/n')(f_2 - e')]^2 + y_p^2 + z_p^2. \quad (3.20)$$

De esta forma, reemplazando (3.19) en (3.15) se obtiene la diferencia de camino óptico buscada.

Cabe destacar que en el caso límite en que el punto de observación esté cerca del eje óptico ( $y_p \approx z_p \approx 0$ ) lo que es equivalente a hacer una aproximación paraxial, la distancia  $x_D$  es muy pequeña haciéndose despreciable frente a la distancia focal  $f_2$ , anulándose además, en estas condiciones, el segundo término de la ecuación (3.15) y en consecuencia la expresión de  $\delta'$  se reduce a :

$$\delta' = 2n'e', \quad (3.21)$$

la que corresponde a la diferencia de camino óptico que se obtendría para un interferómetro de Fabry-Perot de caras paralelas, índice de refracción  $n'$ , espaciado  $e'$  entre sus caras e iluminado por un haz paralelo bajo incidencia normal, cuando sólo se consideren rayos que lo atraviesen directamente y rayos que hayan sufrido una sola reflexión en él.

De esta forma, queda comprobada la consistencia de la metodología empleada para el cálculo de la ecuación (3.15).

Pero, si además ahora se tiene en cuenta que los rayos que son reflejados una vez por la cara plana de salida, pueden provenir de reflexiones múltiples de la onda plana incidente entre los espejos parabólicos que forman parte del interferómetro, se debe agregar un término que exprese esta diferencia de camino óptico adicional. Sin embargo, este término corresponde a la ecuación (2.9) calculada en el Capítulo II.

Así, se puede extender el análisis de  $\delta'$  a la expresión general:

$$\delta_p = \delta' + 2n'pe \quad . \quad (3.21)$$

Con esta ecuación, queda caracterizada la diferencia de camino óptico que permitirá hallar la figura de interferencia producida por la cavidad.

### III-4 PERFIL DE INTERFERENCIA

#### III-4.1 CALCULO DE LA INTENSIDAD TRANSMITIDA

Se ha visto que si una onda plana de amplitud constante incide normal a la superficie plana de la nueva cavidad interferencial propuesta, en la condición especificada en la Figura III-1(b), la diferencia de camino óptico a la salida está dada por la ecuación general (3.20), la que da lugar a una diferencia de fase

$$\phi_p = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_p \quad , \quad (3.22)$$

siendo  $\lambda$  la longitud de onda de la luz incidente.

Recordando que la salida del sistema consiste de una onda esférica convergente y una superposición de ondas planas, como se ve en la Figura III.3, la amplitud transmitida por la cavidad y observada en un punto  $Q(x_q, y_q, z_q)$ , para el cual se ha situado el origen de coordenadas en el punto de convergencia de la onda esférica, está dada por:

$$A_t = E_r \frac{e^{ikr_q}}{r_q} + A_i Tt e^{i\theta_0} + A_i TtR e^{i\theta_1} + A_i TtR^2 e^{i\theta_2} + \dots + A_i TtR^p e^{i\theta_p} \quad , \quad (3.23)$$

donde el significado de los términos de esta ecuación es el siguiente:

$E_r \exp(ikr_q)/r_q$  denota la onda esférica divergente desde H, con amplitud  $E_r$  que llega al punto de observación  $Q(x_q, y_q, z_q)$ ,

$A_i TtR^p \exp(i\theta_p)$  representa a la onda plana que ha sufrido p reflexiones entre las superficies parabólicas, siendo

$A_i$  :amplitud de la onda plana incidente,

T :producto de las transmitividades de los espejos  $E_1$  y  $E_2$ ,

t :producto de las transmitividades de los vidrios, y

R :producto de las reflectividades de los espejos  $E_1$  y  $E_2$ .

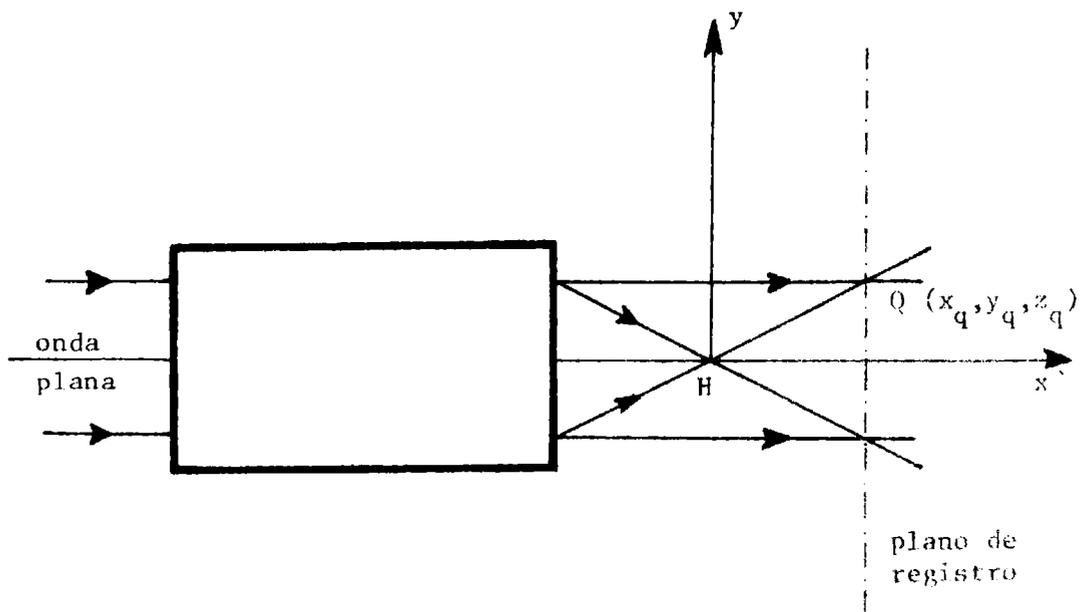


Figura III - 3

La ecuación (3.23) se puede reescribir de la forma:

$$A_t = \left\{ \frac{E_r}{r_q} + A_i T_t \exp[i(\theta_o - kr_q)] + \dots + A_i T_t R^p \exp[i(\theta_p - kr_q)] \right\} \exp(ikr_q) \quad .$$

(3.24)

El exponente  $(\theta_p - kr_q)$  corresponde a la diferencia de fase entre la onda plana que se ha reflejado  $p$  veces y la onda esférica. Por lo tanto, esta diferencia es la expresada por la ecuación (3.22) y recordando la forma de  $\delta_p$  dada por la (3.21), permite poner a la amplitud transmitida como:

$$A_t = \left\{ \frac{E_r}{r_q} + A_i T_t \exp(ik\delta') + A_i T_t R \exp[ik(\delta' + 2n'e)] + \dots + A_i T_t R^p \exp[ik(\delta' + 2n'pe)] \right\} \exp(ikr_q) \quad ,$$

(3.25)

o bien, agrupando términos:

$$A_t = \left\{ \frac{E_r}{r_q} + A_i T_t \exp(ik\delta') [ 1 + R \exp(i\Delta) + R^2 \exp(2i\Delta) + \dots + R^p \exp(ip\Delta) ] \right\} \exp(ikr_q) \quad ,$$

(3.26)

con  $\Delta = 2n'ek$  y  $r_q = \sqrt{x_q^2 + y_q^2 + z_q^2}$  .

La ecuación (3.26) contiene a la serie geométrica de la ecuación (2.13) , por consiguiente, la amplitud transmitida será:

$$A_t = \left\{ \frac{E_r}{r_q} + A_i T_t e^{ik\delta'} \left[ \frac{1 - R^{p+1} e^{i(p+1)\Delta}}{1 - R e^{i\Delta}} \right] \right\} e^{ikr_q}, \quad (3.27)$$

que, en ausencia del término de onda esférica, reproduce la amplitud transmitida dada por la ecuación (2.14) que corresponde a la cavidad parabólica confocal, sin los dióptricos correctores, para el caso en que  $n = n'$ .

Así, como la expresión de  $A_t$  permite obtener la distribución de intensidad transmitida que caracteriza a la figura de interferencia, se tiene :

$$\begin{aligned} I_t = A_t A_t^* = & \left| \frac{E_r}{r_q} \right|^2 + |A_i|^2 T_t^2 \left| \frac{1 - R^{p+1} e^{i(p+1)\Delta}}{1 - R e^{i\Delta}} \right|^2 + \\ & + \frac{E_r}{r_q} A_i^* T_t e^{-ik\delta'} \left\{ \frac{1 - R^{p+1} e^{-i(p+1)\Delta}}{1 - R e^{-i\Delta}} \right\} + \\ & + \frac{E_r^*}{r_q} A_i T_t e^{ik\delta'} \left\{ \frac{1 - R^{p+1} e^{i(p+1)\Delta}}{1 - R e^{i\Delta}} \right\}, \quad (3.28) \end{aligned}$$

donde, si se tiene en cuenta que la onda esférica se origina por una reflexión de la onda plana incidente en la superficie plana de vidrio y otra en el espejo  $E_2$ , su amplitud compleja es :

$$E_r = A_i T_{tr} r_v R_2, \quad (3.29)$$

siendo  $R_2$  el coeficiente de reflectividad de la superficie  $E_2$ , y  $r_v$  la

reflectividad del vidrio.

El segundo término de la ecuación (3.28) representa a la intensidad de las ondas planas transmitidas que corresponde a la expresión (2.15) , a menos del factor de transmitividad producto del vidrio. De esta manera, se puede expresar la (3.28) como:

$$I_t = I_i T^2 t^2 \left\{ (r_v R_2 / r_q)^2 + I_p + (r_v R_2 / r_q) [B e^{ik\delta'} + B^* e^{-ik\delta'}] \right\} , \quad (3.30)$$

donde

$$I_p = \left| \frac{1 - R^{p+1} e^{i(p+1)\Delta}}{1 - R e^{i\Delta}} \right|^2 = \frac{(1 - R^{p+1})^2 + 4R^{p+1} \text{sen}^2[(p+1)\Delta/2]}{1 - R^2 + 4R \text{sen}^2[\Delta/2]} ,$$

$$B = \frac{1 - R^{p+1} e^{-i(p+1)\Delta}}{1 - R e^{-i\Delta}} ,$$

y

$$I_i = |A_i|^2 ,$$

o bien

$$I_t = I_i T^2 t^2 \left\{ (r_v R_2 / r_q)^2 + I_p + 2(r_v R_2 / r_q) \text{Re}\{B e^{ik\delta'}\} \right\} . \quad (3.31)$$

El coeficiente complejo B puede ser reescrito de la forma

$$B = \frac{\{1 - R^{p+1} (\cos[\Delta(p+1)] - i \operatorname{sen}[(p+1)\Delta])\} \{1 - R \cos(\Delta) + iR \operatorname{sen}(\Delta)\}}{\{1 - R \cos(\Delta)\}^2 + \{R \operatorname{sen}(\Delta)\}^2}, \quad (3.32)$$

y llamando:

$$b = \{1 - R \cos(\Delta)\}^2 + \{R \operatorname{sen}(\Delta)\}^2, \quad (3.33)$$

se tiene, para  $\operatorname{Re}\{B e^{ik\delta'}\}$  la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{B e^{ik\delta'}\} = \frac{1}{b} \{ & [ (1 - R^{p+1} \cos[(p+1)\Delta]) (1 - R \cos(\Delta)) + \\ & + R \operatorname{sen}(\Delta) \operatorname{sen}[(p+1)\Delta] ] \cos(k\delta') + \\ & + [ (1 - R \cos(\Delta)) \operatorname{sen}[(p+1)\Delta] - \\ & - (1 - R^{p+1} \cos[(p+1)\Delta]) R \operatorname{sen}(\Delta) ] \operatorname{sen}(k\delta') \}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Si se definen:

$$C = (1 - R^{p+1} \cos[(p+1)\Delta]) (1 - R \cos(\Delta)) + R \operatorname{sen}(\Delta) \operatorname{sen}[(p+1)\Delta],$$

y

$$D = ( 1 - R \cos(\Delta) ) \operatorname{sen}[(p+1)\Delta] - ( 1 - R^{p+1} \cos[(p+1)\Delta] ) R \operatorname{sen}(\Delta) \quad , \quad (3.35)$$

se puede escribir

$$\operatorname{Re}\{B e^{ik\delta'}\} = \frac{1}{b} \{ C \cos(k\delta') + D \operatorname{sen}(k\delta') \} \quad . \quad (3.36)$$

Por lo que, en definitiva se puede expresar la intensidad transmitida como

$$I_t = I_i T_t^2 \left\{ \left( r_v R_2 / r_q \right)^2 + I_p + 2 \left( r_v R_2 / b r_q \right) ( C \cos(k\delta') + D \operatorname{sen}(k\delta') ) \right\} \quad . \quad (3.37)$$

Debido a la dependencia cuadrática con las coordenadas del punto de observación se concluye que la figura de interferencia descrita por la ecuación (3.37) tiene simetría circular, y consiste de anillos concéntricos centrados en el eje del sistema óptico. En la Figura III.4 se muestra la curva teórica correspondiente a la relación entre la intensidad transmitida e incidente a menos de factores de escala.

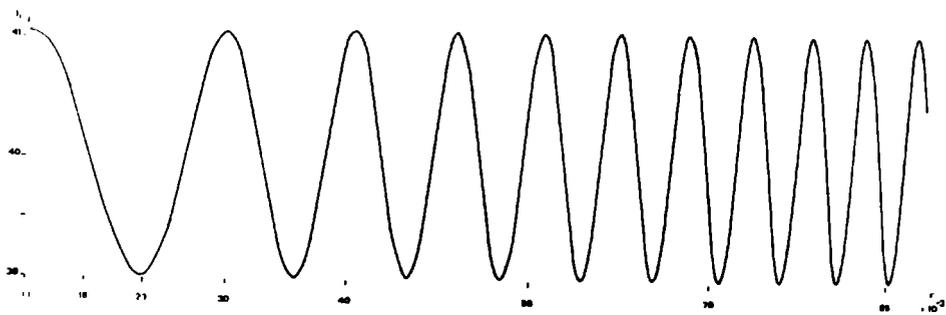


Figura III - 4

### III-4.2 ANALISIS DEL DIAGRAMA DE INTERFERENCIA

Al observar el registro fotográfico del diagrama de interferencia tratado en III-4.1 , se notan características particulares. Antes de comenzar con este análisis, conviene recordar algunos aspectos básicos sobre la teoría de placas zonales.

La propiedad de coherencia de la luz de un láser, permite la producción de tales placas, como por ejemplo las placas zonales de Fresnel, conociéndose varios métodos simples para generarlas, que se basan en el registro fotográfico de la figura de interferencia producida por la superposición de una onda plana y una onda esférica<sup>(1)</sup>. Sin embargo, se debe notar que las placas así producidas no son de Fresnel, según la definición original descrita en la mayoría de los textos de óptica<sup>(2)</sup>.

Una placa zonal de Fresnel se compone por definición, de zonas transparentes y opacas alternadas, de área constante e igual a  $\pi\lambda f$  , donde  $f$  es la distancia focal principal ( o de primer orden). Sus zonas son de contornos abruptos cuyos radios están dados por

$$r = \sqrt{n\lambda f} \quad (3.38)$$

donde  $n$  es un entero positivo que representa al  $n$ -ésimo radio. Su perfil en función de estos radios está representado por una función de onda cuadrada, como muestra la curva (a) de la Figura III.5.

Si un haz paralelo de luz monocromática incide normalmente sobre una placa zonal de Fresnel, será difractado en dos conjuntos de focos, los reales y los virtuales, a lo largo de su eje óptico. De aquí en más, la discusión tratará al foco real solamente, porque tales focos son conjugados uno del otro y tienen una relación de simetría especular con respecto a la placa zonal.

Además de un foco principal brillante de distancia focal  $f$  detrás de la placa, se observa una serie de focos en las posiciones  $f/3, f/5, \text{etc.}$ <sup>(3)</sup>.

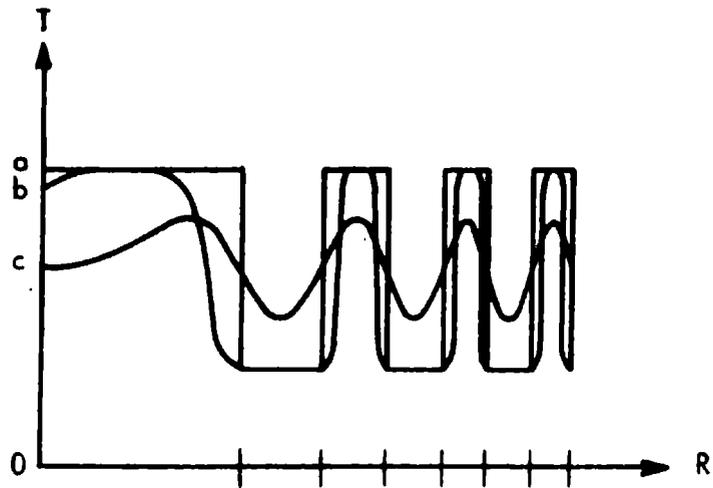


Figura III - 5

En realidad, las placas zonales con las propiedades mencionadas no pueden ser generadas registrando en una emulsión fotográfica la figura de interferencia de los frentes de onda coherentes.

Si se supone que el proceso de registro es ideal, en el sentido de que se cumple la condición dada por la ecuación (1.22) para su transmisión en amplitud, entonces, la función transmisión de una placa zonal producida ópticamente, en términos de sus radios, se transforma en una curva sinusoidal continua, de la forma indicada por (c) en la Figura III.5. Pero cuando placas de esta clase son iluminadas, dispersan la luz incidente en sólo un punto, el foco principal, no existiendo focos de orden mayor. Estos registros son llamados placas zonales de Gabor.

A pesar de que las verdaderas placas de Gabor pueden ser obtenidas por métodos ópticos, con cuidadoso manejo de la exposición y del proceso de revelado, en la práctica, debido a los efectos no lineales del material fotográfico, usualmente se obtiene una placa de Gabor distorsionada llamada placa zonal generalizada o binaria, donde los efectos de la no linealidad son, no solamente truncar las crestas y aplanar los valles de la función transmisión sinusoidal, sino también agrandar las áreas de las zonas como se observa en la curva (b) de la Figura III.5. En consecuencia, al iluminar una placa de esta clase, aparecerán focos de alto orden además del foco principal, ubicándose en  $f/2$ ,  $f/3$ ,  $f/4$ ,  $f/5$ , etc. , a lo largo del eje óptico, siendo  $f$  la distancia focal principal. Este hecho marca la diferencia más importante entre las zonas generalizadas y las zonas de Fresnel, para las que sólo existen las fracciones impares de  $f$ .

Al compararse la curva teórica de la Figura III.4 correspondiente al perfil de interferencia generado por la cavidad interferencial tratada en este capítulo, con las curvas de intensidad características de las placas zonales, dadas por la Figura III.5 , se puede afirmar que este nuevo perfil de interferencia da lugar a una nueva clase de placa zonal que no se corresponde con las ya descritas.

Por otra parte, experimentalmente se observa la presencia de un solo par de focos (uno virtual y otro real) comportándose, en este sentido,

como una placa zonal de Gabor.

Pero como se expresó anteriormente, el perfil de la figura de interferencia no es el de una placa zonal de esta clase. Esta diferencia resulta ser lógica, si se tiene en cuenta que este diagrama de interferencia es generado por una onda esférica y una superposición de ondas planas en tanto que, una placa zonal de Gabor se obtiene de la interferencia de una onda esférica y una única onda plana.

En resumen, se ha podido caracterizar a la figura de interferencia de una nueva cavidad resonante, formada principalmente por dos superficies parabólicas, habiéndose encontrado que el registro de tal perfil presentó un interesante comportamiento como placa zonal, estableciéndose además, que no está enmarcada dentro de las clasificaciones habituales.

## REFERENCIAS

1. Champagne, E., Appl. Opt., Vol. 7, p. 381 (1968).
2. Jenkins, F. and White, H., "Fundamentals of Optics", p. 360, McGraw-Hill, New York (1957).
3. Chau, H., Appl. Opt., Vol. 8, p. 1209 (1969).

## CAPITULO IV

- IV-1            Introducción.
- IV-2            Las placas zonales y su relación con la holografía.
- IV-3            Transformada de Fourier del registro de interferencia.
  - 1. Aproximaciones a usar en la teoría.
  - 2. Análisis del registro.
- IV-4            Holografía de la transformada de Fourier haciendo uso del interferograma.
- IV-5            Análisis del Modo 1 en su disposición de múltiple enfoque.

#### IV-1 INTRODUCCION

A continuación se tratará en detalle el comportamiento holográfico de las placas zonales, en general, y al interferograma discutido en el Capítulo III, en particular.

Este hecho, unido a la interpretación de que esta figura de interferencia actúa a la vez como lente positiva y negativa, lleva a pensar que tal registro es un holograma de Fourier y, que al mismo tiempo, puede ser usado como dispositivo para obtener hologramas de Fourier sin hacer uso de lentes y haz explícito de referencia.

Con este propósito, en las Secciones que siguen, se elabora una teoría basada exclusivamente en la validez del fenómeno de difracción de Fresnel que comprueba las suposiciones arriba mencionadas.

Por último, se extienden estos razonamientos para el caso de usar un registro interferencial de la salida obtenida cuando se coloca el interferómetro en la disposición de múltiple enfoque, discutida en la Sección III.2.

#### IV-2 LAS PLACAS ZONALES Y SU RELACION CON LA HOLOGRAFIA

En el Capítulo III se mostró que el interferograma obtenido con la nueva cavidad resonante presenta características similares a las de una lente.

Esta propiedad, común a la de las placas zonales descritas, se basa en la interferencia y es equivalente a la combinación de una lente positiva y una negativa.

En este sentido se puede decir que una placa zonal es, en general, una especie particular de red de difracción circular. Esto lleva a la interpretación de que se trata de un holograma de una fuente puntual<sup>(1)</sup>.

Pero esta analogía debe ser manejada cuidadosamente, porque puede ser aceptada como una identidad, lo cual no es cierto.

Un enunciado más correcto sería decir que las placas zonales son clases especiales de hologramas.

En vista de esto, al usar un haz paralelo de luz coherente y monocromática (si éste era el haz de referencia), se reconstruye una imagen virtual del objeto, o sea el foco posterior, y una imagen real o foco anterior.

Pero las placas zonales, tales como las de Fresnel o las generalizadas, tienen más de un foco, por lo que en realidad, desde el punto de vista de actuar como lentes, se las puede concebir como superposición de varias de ellas, generando así muchas imágenes del objeto original, supuestó éste como una fuente puntual. De esta forma, serían hologramas que presentan ruido.

La placa zonal de Gabor actúa, en este sentido, como un holograma ideal de una fuente puntual. Esta interpretación del fenómeno fue hecha por Denis Gabor en sus primeros trabajos, antes del descubrimiento del láser.

Un holograma de Gabor se obtiene cuando el objeto es un pequeño obstáculo difractor, situado en el camino de una onda plana, más que una fuente puntual que emite luz. La reconstrucción muestra una inversión de

contraste con respecto a la escena original, por esto es que se observa la presencia de un foco emisor de luz.

El nuevo interferograma tiene un comportamiento tal como el holograma de Gabor, pero no presenta una inversión de contraste, siendo ésta una ventaja, ya que con un holograma de Gabor es posible, en principio, formar imágenes de un objeto que consista, por ejemplo, de letras opacas sobre un fondo transparente, pero no de letras transparentes sobre un fondo opaco. Esta restricción limita seriamente las potenciales aplicaciones de esta clase de hologramas.

#### IV-3 TRANSFORMADA DE FOURIER DEL REGISTRO DE INTERFERENCIA

En la Sección IV-2 se discutió la equivalencia del interferograma con una lente.

Ahora bien, una de las más importantes y útiles propiedades de una lente reside en su habilidad inherente para realizar la transformada de Fourier bidimensional. En lo que sigue se supone iluminación monocromática.

Considérese el caso de un objeto colocado a continuación de una lente, con una transmitancia  $t_o$  y que esté ubicado a una distancia  $d$  del plano focal posterior. Supóngase que la lente es iluminada por una onda plana bajo incidencia normal. De esta forma sobre el objeto se tiene una onda convergente hacia el plano focal de la lente.

En la aproximación de la óptica geométrica, la amplitud de la onda esférica que incide en el objeto es  $Af/d$ , siendo  $f$  la distancia focal de la lente. La región particular del objeto que está iluminada se determina por la intersección del cono convergente de rayos con el plano del objeto. Si la lente es circular de diámetro  $\ell$ , entonces una región circular de radio  $\ell d/f$  es iluminada en el espacio del objeto. El tamaño finito de esta mancha de iluminación puede ser representada matemáticamente por la proyección de la función pupila de la lente hacia el cono de rayos sobre el objeto, obteniéndose una función pupila efectiva en el plano objeto  $P[y(f/d), z(f/d)]$ , de esta forma la amplitud transmitida, será:

$$U_o(y, z) = \left\{ A \frac{f}{d} P[yf/d, zf/d] \exp\left[-\frac{ik}{2d}(y^2+z^2)\right] \right\} t_o(y, z) \quad (4.1)$$

Suponiendo la validez de la difracción de Fresnel del plano objeto al plano focal, entonces:

$$U_f(y_f, z_f) = \frac{A}{i\lambda d} \frac{f}{d} \exp\left\{\frac{ik}{2d}(y_f^2+z_f^2)\right\} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} t_o(y, z) P(yf/d, zf/d) \exp\left\{-\frac{2\pi i}{\lambda d}(yy_f+zz_f)\right\} dydz \quad (4.2)$$

Así, a menos de un factor de fase cuadrático, la distribución de amplitud en el plano focal es la transformada de Fourier<sup>(2)</sup> de la porción del objeto sustentada por la apertura proyectada de la lente.

Ello permite asegurar que la escala de la transformada de Fourier está bajo el control del experimentador, lo que es de suma utilidad en las aplicaciones al filtrado espacial, donde algunos ajustes potenciales de dicha escala son a menudo de considerable ayuda.

El siguiente paso es analizar, dentro de este esquema, lo que sucede cuando el registro de la figura de interferencia de la cavidad parabólica es usado como objeto, pero antes es conveniente realizar algunas aproximaciones adecuadas.

#### IV-3.1 APROXIMACIONES A USAR EN LA TEORIA

En primer lugar, en la región de Fresnel es válido considerar a una onda esférica que se propaga de un punto  $P_1(y_1, z_1)$  a otro punto  $P_2(y_2, z_2)$ , separados por una distancia  $d$ , como:

$$\frac{e^{ikd}}{i\lambda d} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda d}[(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]\right\} \quad . \quad (4.3)$$

Luego, retomando el proceso de registro de la figura de interferencia dentro de este marco, se puede representar a la amplitud incidente sobre el medio fotosensible según lo expresado por la ecuación (3.23) por,

$$A_T = \frac{E_r}{x} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda x}(y^2 + z^2)\right\} + A_i TtB^* \exp(ik\Psi) \quad , \quad (4.4)$$

$$\text{donde } B^* = \frac{1 - R^{p+1} e^{i(p+1)\Delta}}{1 - R e^{i\Delta}} \quad .$$

$E_r$  está dado por la ecuación (3.29),  $A_i, T, t$  y  $\Delta$  tienen el mismo significado que en el Capítulo III,  $k\psi$  es la fase de las ondas planas, y finalmente  $x$  es la distancia del medio de registro al punto de enfoque, tal como se muestra en la Figura IV.1.

Así, la intensidad almacenada en un punto cualquiera del plano  $y-z$  es

$$I(y, z) = \frac{|E_r|^2}{x^2} + A_i^2 T^2 t^2 |B|^2 + \frac{E_r}{x} A_i^* T t B e^{ik\delta'} + \frac{E_r^*}{x} A_i T t B^* e^{-ik\delta'} \quad , \quad (4.5)$$

siendo  $\delta'$  expresada por la ecuación (3.15).

Además, si se define a:

$$I_0 = \frac{|E_r|^2}{x^2} + A_i^2 T^2 t^2 |B|^2 \quad , \quad y \quad \gamma = \frac{E_r}{x} A_i^* T t B \quad (4.6)$$

la intensidad se expresa,

$$I(y, z) = I_0 + \{ \gamma e^{ik\delta'} + \gamma^* e^{-ik\delta'} \} \quad . \quad (4.7)$$

En este punto, antes de continuar con el desarrollo de la teoría, es conveniente encontrar una ecuación para la diferencia de camino óptico  $\delta'$ , compatible con las aproximaciones realizadas.

Para ello, se separa a la ecuación (3.15) en tres términos, a saber:

$$K(y, z) = \frac{2n'f_2(e' - x_D)}{(f_2 - x_D)} \quad , \quad (4.8)$$

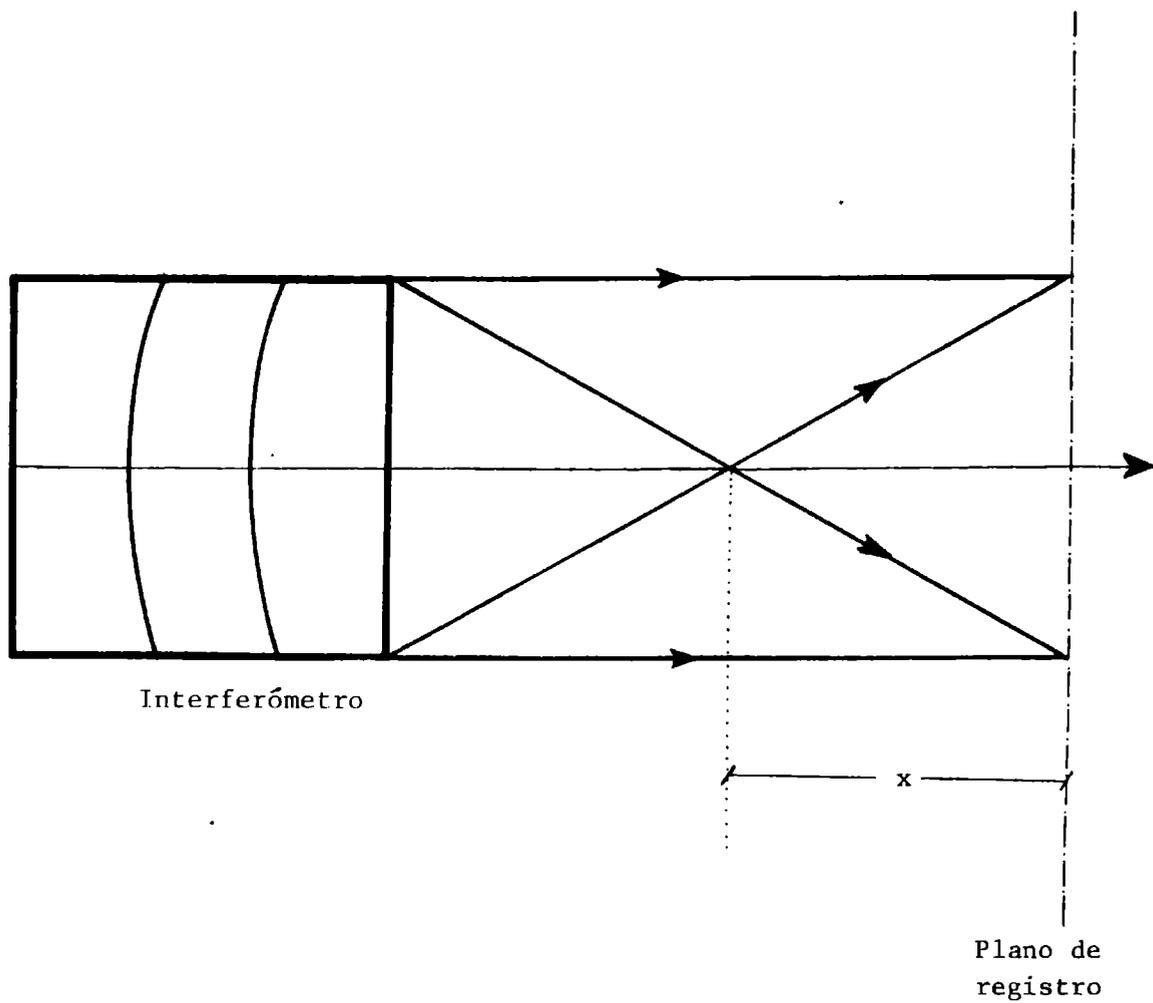


Figura IV - 1

$$L(y,z) = \frac{nx_p n'}{n'x_p - n(f_2 - e')} \sqrt{[x_p - (n/n')(f_2 - e')]^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad (4.9)$$

$$N(y,z) = nx_p \quad . \quad (4.10)$$

En particular para  $L(y,z)$  se encuentra que, si se define,

$$b = \frac{nx_p n'}{n'x_p - n(f_2 - e')} = \frac{nx_p}{x_p - (n/n')(f_2 - e')} \quad , \quad (4.11)$$

y como  $x = x_p - (n/n')(f_2 - e')$ , reescribiendo a  $b$  según

$$b = n + \frac{n}{n'x} (f_2 - e') \quad , \quad (4.12)$$

resulta entonces:

$$L(y,z) = b \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = bx \sqrt{1 + \frac{(y^2 + z^2)}{x^2}} \quad , \quad (4.13)$$

pero si se coloca al plano de registro a una distancia tal que se cumpla que  $(y^2 + z^2)/x^2 \ll 1$ , lo cual se satisface en la región de Fresnel, puede desarrollarse en serie la raíz de la ecuación (4.13), y despreciando los términos de orden superior al cuadrático se obtiene:

$$L(y,z) = bx + \frac{1}{2} \frac{y^2 + z^2}{x} \quad . \quad (4.14)$$

Análogamente, se obtiene:

$$N(y,z) = bx \quad . \quad (4.15)$$

El término  $K(y,z)$  requiere, no obstante, un análisis más detallado. Haciendo primero la aproximación para  $x_D$  partiendo de la ecuación (3.19), se la puede expresar como:

$$x_D = \frac{f_1}{2} \frac{1}{\frac{2An'^2}{n^2(y^2+z^2)} - 1} \quad , \quad (4.16)$$

o bien

$$x_D = \frac{f_2}{2} \frac{n^2(y^2+z^2)}{2n'^2(x^2+y^2+z^2) - n^2(y^2+z^2)} \quad . \quad (4.17)$$

Con el resultado expresado por la ecuación (4.17), se puede escribir:

$$e^{-x_D} = \frac{e^{[2n'^2(x^2+y^2+z^2) - n^2(y^2+z^2)]} - (f_2/2)n^2(y^2+z^2)}{2n'^2(x^2+y^2+z^2) - n^2(y^2+z^2)} \quad , \quad (4.18)$$

y

$$f_1^{-x_D} = f_2 \frac{2n'^2(x^2+y^2+z^2) - (3/2)n^2(y^2+z^2)}{2n'^2(x^2+y^2+z^2) - n^2(y^2+z^2)} \quad , \quad (4.19)$$

de tal suerte que:

$$K(y,z) = 2n' \left\{ \frac{e' [2n'^2(x^2+y^2+z^2) - n^2(y^2+z^2)] - (f_2/2)[n^2(y^2+z^2)]}{2n'^2(x^2+y^2+z^2) - (3/2)n^2(y^2+z^2)} \right\} , \quad (4.20)$$

donde, recordando que  $(y^2+z^2)/x^2 \ll 1$  , resulta:

$$K(y,z) \approx 2n'e' - (n^2/n')(e' + \frac{f_2}{2}) \frac{y^2+z^2}{x^2} . \quad (4.21)$$

En definitiva se ha conseguido una representación para la diferencia de camino óptico, válida en la región de difracción de Fresnel:

$$\delta'(y,z) \approx 2n'e' - (n^2/n')(e' + \frac{f_2}{2}) \frac{y^2+z^2}{x^2} + [n + \frac{n^2}{n'x} (f_2 - e')] \frac{y^2+z^2}{2x} , \quad (4.22)$$

o bien:

$$\delta'(y,z) \approx 2n'e' + \frac{\epsilon}{2x} (y^2+z^2) , \quad (4.23)$$

con

$$\epsilon = n \left\{ 1 - 3 \frac{ne'}{n'x} \right\} . \quad (4.24)$$

IV-3.2 ANALISIS DEL REGISTRO

Ahora, si se trabaja en las condiciones de linealidad del medio de registro, se obtiene una amplitud de transmitancia dada por la expresión (1.22):

$$t(y,z) = t_0 + \beta I(y,z) \quad , \quad (4.25)$$

o, usando la ecuación (4.7):

$$t(y,z) = t_0 + \beta I_0 + \beta \{ \gamma e^{ik\delta'} + \gamma^* e^{-ik\delta'} \} \quad . \quad (4.26)$$

Si la transmitancia expresada por la ecuación (4.26) es llevada a nivel experimental como se señala en la Figura IV.2, la distribución de campo en el plano focal posterior de la lente o plano de Fourier, está dado por la expresión (4.2), bajo la forma:

$$\begin{aligned} U_f(y_f, z_f) = & \frac{A_p}{i\lambda d} \frac{f}{d} \exp\left\{\frac{ik}{2d}(y_f^2 + z_f^2)\right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_0 P(y_d^f, z_d^f) \exp\left\{-\frac{2\pi i}{\lambda d}(yy_f + zz_f)\right\} dydz + \right. \\ & + \beta \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(y_d^f, z_d^f) e^{\frac{4\pi i}{\lambda} n' e'} \exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{\epsilon}{x}(y^2 + z^2)\right\} \exp\left\{-\frac{2\pi i}{\lambda d}(yy_f + zz_f)\right\} dydz + \\ & \left. + \beta \gamma^* \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(y_d^f, z_d^f) e^{-\frac{4\pi i}{\lambda} n' e'} \exp\left\{-\frac{2\pi i \epsilon}{\lambda x}(y^2 + z^2)\right\} \exp\left\{-\frac{2\pi i}{\lambda d}(yy_f + zz_f)\right\} dydz \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

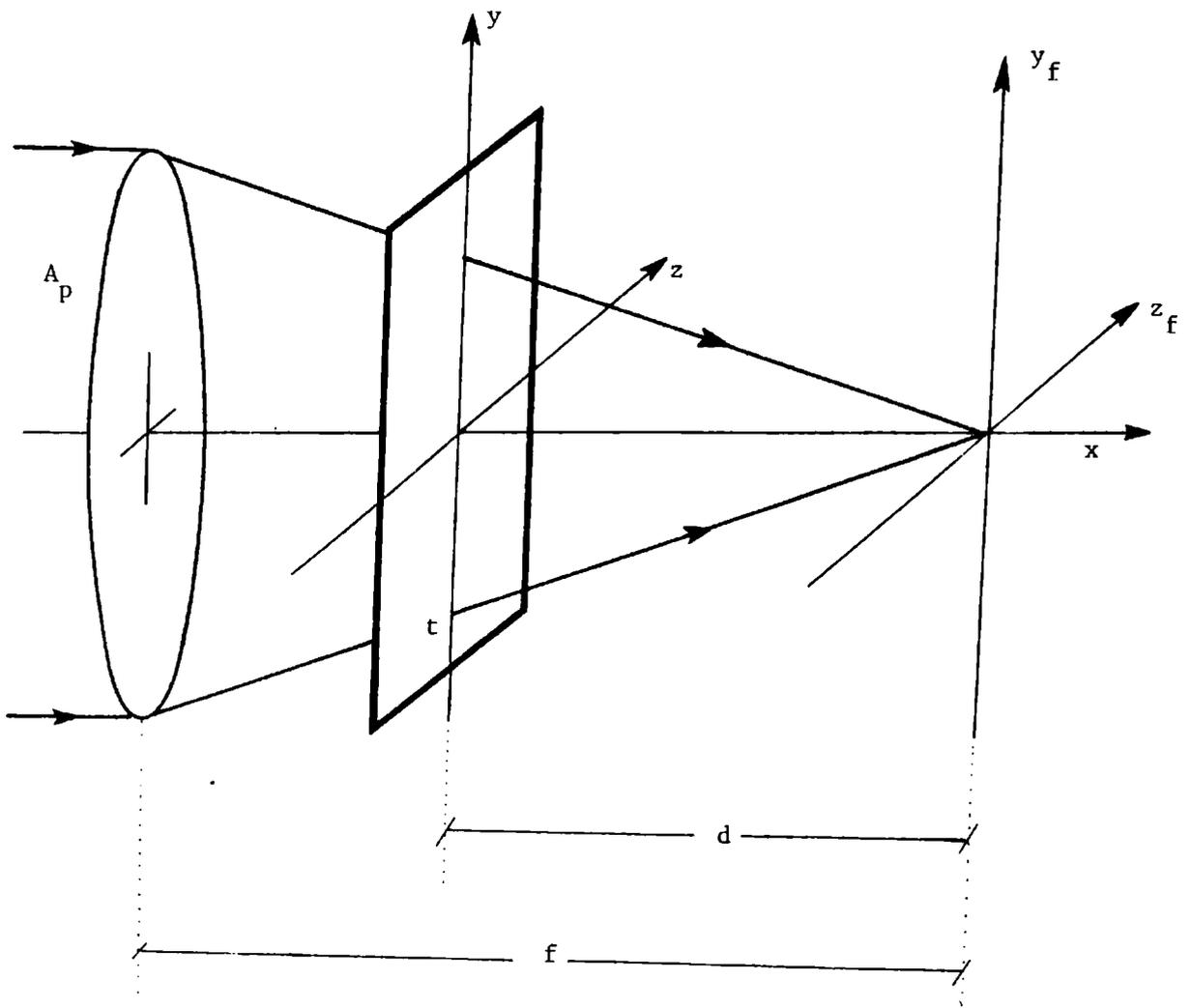


Figura IV - 2

habiendo reemplazado  $\delta'$  por su expresión según la (4.23), haciendo  $T_o = t_o + \beta I_o$  y la función pupila definida por:

$$P\left(\frac{f}{d}, \frac{z}{d}\right) = \begin{cases} 1 & \text{dentro del \u00e1rea iluminada en } t \\ 0 & \text{fuera de ella.} \end{cases}$$

Puesto que la funci\u00f3n  $U_f(y_f, z_f)$  es de variables separables, y dado que se distinguen tres t\u00e9rminos, se la puede reescribir, para facilitar su posterior an\u00e1lisis, como:

$$U_f(y_f) = U_0(y_f) + U_1(y_f) + U_2(y_f) \quad , \quad (4.28)$$

donde

$$U_0(y_f) = \frac{A_p \cdot f}{i\lambda d \cdot d} e^{\frac{ik}{2d} y_f^2} T_o \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{f}{d}\right) \exp\left\{-\frac{2\pi i}{\lambda d}(yy_f)\right\} dy \quad , \quad (4.29)$$

$$U_1(y_f) = \frac{A_p \cdot f}{i\lambda d \cdot d} e^{\frac{ik}{2d} y_f^2} \int_{-\infty}^{\infty} \beta \gamma P\left(\frac{f}{d}\right) e^{\frac{4\pi i}{\lambda} n' e'} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{\epsilon}{x} y^2} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda d} yy_f} dy \quad , \quad (4.30)$$

y

$$U_2(y_f) = \frac{A_p \cdot f}{i\lambda d \cdot d} e^{\frac{ik}{2d} y_f^2} \int_{-\infty}^{\infty} \beta \gamma * P\left(\frac{f}{d}\right) e^{-\frac{4\pi i}{\lambda} n' e'} e^{-\frac{2\pi i \epsilon y^2}{\lambda x}} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda d} yy_f} dy \quad . \quad (4.31)$$

Estos términos son de la forma:

$$U_i(y_f) = C(y_f) F\{e^{\pm i\pi\xi^2}\} \quad , \quad (4.32)$$

donde el símbolo  $F\{ \}$  denota la transformada de Fourier.

Entonces, usando la relación:

$$F\{e^{\pm i\pi\xi^2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{\pm i\pi\xi^2} e^{-2\pi i\nu\xi} = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} e^{\mp i\pi\nu^2} \quad , \quad (4.33)$$

que permite obtener la solución de los campos  $U_i(y_f)$ , según:

$$U_0(y_f) = A_p \frac{T_0}{i\lambda d} \frac{f}{d} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda d} y_f^2\right\} \delta\left(y_f - \frac{1}{\lambda d}\right) \quad , \quad (4.34)$$

$$U_1(y_f) = A_p \frac{f}{d} \frac{f_p}{d} \beta\gamma e^{\frac{4\pi i}{\lambda} n' e'} e^{-\frac{i\pi}{\lambda d^2} (f_p - d) y_f^2} \quad , \quad (4.35)$$

$$U_2(y_f) = -A_p \frac{f}{d} \frac{f_p}{d} \beta\gamma^* e^{-\frac{4\pi i}{\lambda} n' e'} e^{\frac{i\pi}{\lambda d^2} (f_p + d) y_f^2} \quad , \quad (4.36)$$

con

$$f_p = \frac{x}{\epsilon} \quad . \quad (4.37)$$

Se puede demostrar<sup>(3)</sup> que si al interferograma se lo ilumina con una onda plana monocromática, sus dos focos discutidos en la Sección III.4.2 son simétricos con respecto al medio de registro, y situados a una distancia del mismo dada justamente por la ecuación (4.37). Por esta razón, de aquí en más, al parámetro  $f_p$  se lo denominará distancia focal del registro de interferencia.

Así, la distribución de campo total en el plano focal de la lente resulta:

$$\begin{aligned}
 U_f(y_f, z_f) = & A_p \frac{f}{d} \left\{ \frac{T_o}{i\lambda d} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda d} (y_f^2 + z_f^2)\right\} \delta\left(\frac{y_f}{\lambda d}, \frac{z_f}{\lambda d}\right) + \right. \\
 & + \frac{f}{d} \beta \left[ \gamma \exp\left\{\frac{4\pi i}{\lambda} n' e'\right\} \exp\left\{-\frac{i\pi}{\lambda d} 2(f_p - d)(y_f^2 + z_f^2)\right\} - \right. \\
 & \left. \left. - \gamma^* \exp\left\{-\frac{4\pi i}{\lambda} n' e'\right\} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda d} 2(f_p + d)(y_f^2 + z_f^2)\right\} \right] \right\} . \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

A continuación se analizará por separado cada término que caracteriza al campo, poniendo énfasis a la interpretación física.

La ecuación (4.34) representa a una onda esférica que converge al eje óptico del sistema, justamente en el plano de Fourier, mientras que la (4.35) describe a una onda esférica convergente a un punto sobre el eje óptico situado detrás del plano focal a una distancia

$$F = \frac{d^2}{f_p - d} , \quad (4.39)$$

y la (4.36) es una onda esférica divergente desde un punto en el eje óptico, delante del plano focal, ubicado en:

$$F' = \frac{d^2}{f_p + d} \quad . \quad (4.40)$$

La Figura IV.3 muestra un esquema de tal situación.

La presencia de estos puntos de enfoque es similar a la que se obtiene si se registra un holograma de Fourier de una fuente puntual centrada en el eje del sistema, pero no en el mismo plano que la fuente de referencia<sup>(4)</sup>.

El efecto que ésto produce es que los planos de enfoque no se encuentren en el plano de Fourier, sino desplazados con respecto a él.

Esto implica que el interferograma, cuyo diagrama fue generado por la cavidad de caras parabólicas con los dispositivos correctores, es un holograma de Fourier de una fuente puntual.

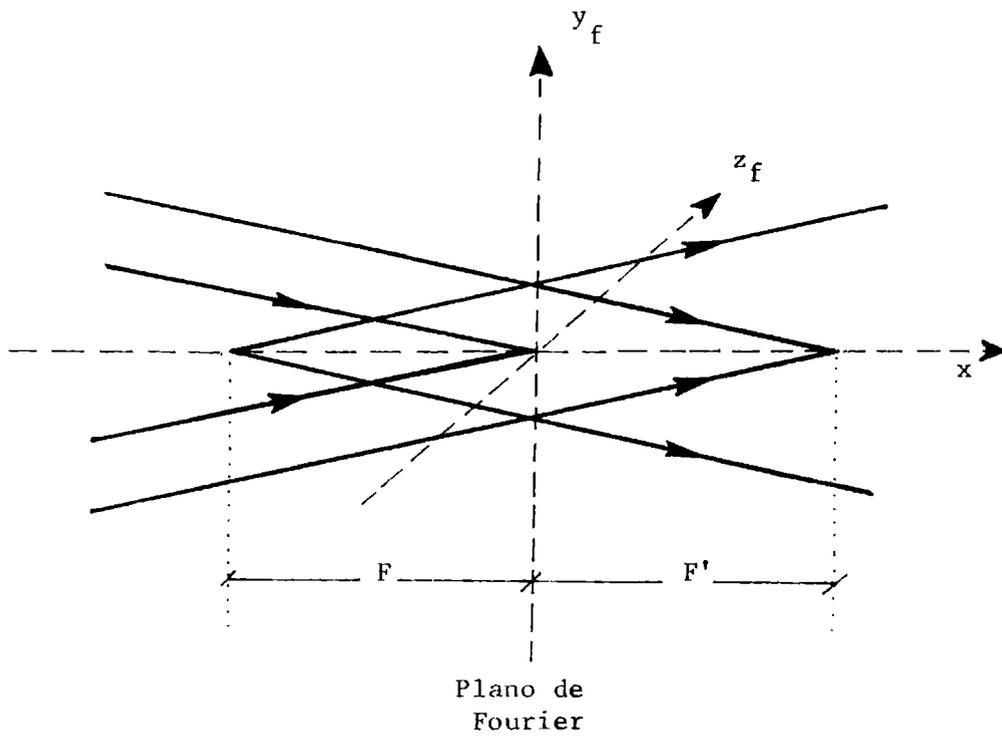


Figura IV - 3

IV-4 HOLOGRAFIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER HACIENDO USO DEL  
INTERFEROGRAMA

La holografía de la transformada de Fourier ha sido explorada y estudiada desde su advenimiento, alrededor de casi dos décadas<sup>(5)</sup>.

Esta técnica de alta resolución tiene útiles aplicaciones en el procesamiento óptico de datos, reconocimiento de caracteres y refuerzo de imágenes entre otras, y excelentes exposiciones sobre ella aparecen en los textos sobre la holografía.

En esta Sección se mostrará que el registro de interferencia, con su propiedad de ser una combinación de una lente convergente y otra divergente, sirve como medio para producir hologramas de Fourier sin emplear lentes y, más aún, sin haz explícito de referencia. Para ello, se considerará el esquema experimental de la Figura IV.4, en el que una fuente puntual está ubicada en la posición  $(y_o, z_o)$ , a una distancia  $d_o$  del plano donde se coloca la transmitancia  $t(y_T, z_T)$  que contiene al interferograma, y que está descrita por la ecuación (4.26), estando dicho plano a  $d_R$  del plano donde se coloca una placa de registro.

En lo que sigue se supone la validez de la aproximación paraxial y la propagación de Fresnel desde el plano  $y_o-z_o$  al  $y_T-z_T$  y de éste al  $y_R-z_R$ .

En estas condiciones, la onda de amplitud  $A_o$  que sale de  $P_o(y_o, z_o)$  y que arriba a un punto  $(y_T, z_T)$  será descrita por:

$$A_o \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda d_o} [(y_T - y_o)^2 + (z_T - z_o)^2]\right\}, \quad (4.41)$$

y, por lo tanto, el campo que emerge de la transmitancia se expresa según:

$$U_T(y_T, z_T) = A_o \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda d_o} [(y_T - y_o)^2 + (z_T - z_o)^2]\right\} t(y_T, z_T) P(y_T, z_T) \quad (4.42)$$

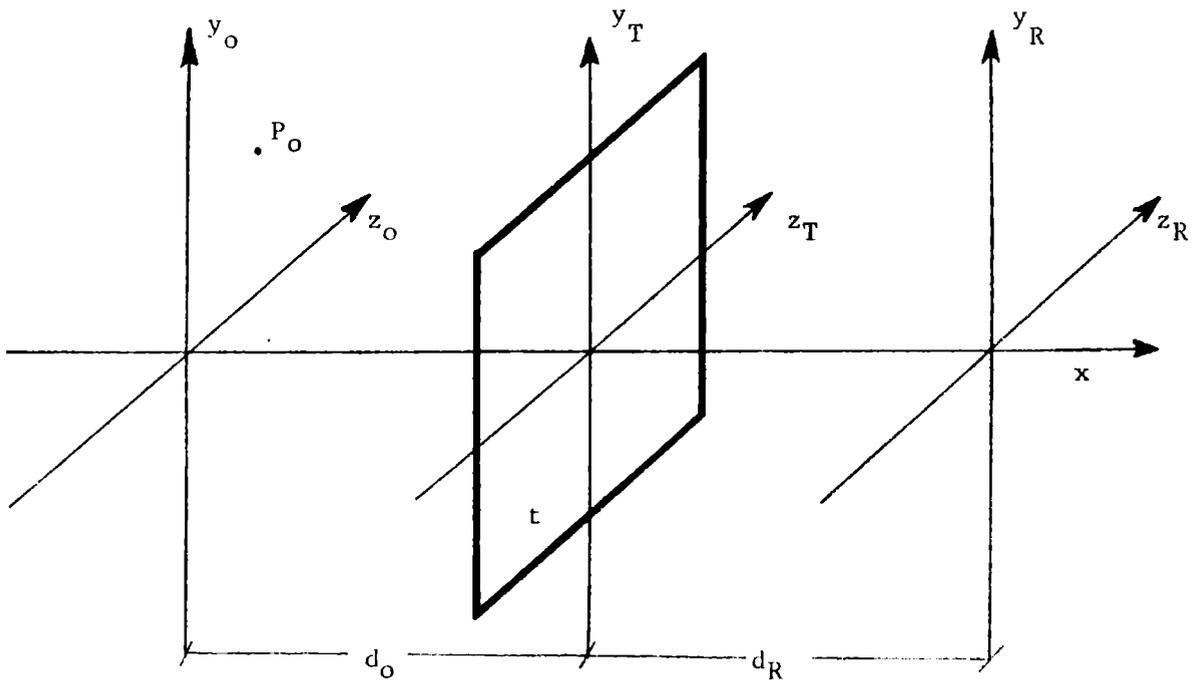


Figura IV - 4

siendo  $P(y_T, z_T)$  la función pupila.

La integral de superposición que describe la distribución de campo en el plano de registro tiene la forma:

$$U_R(y_R, z_R) = \frac{e^{ikd_R}}{i\lambda d_R} \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} U_T(y_T, z_T) \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda d_R} [(y_R - y_T)^2 + (z_R - z_T)^2]\right\} dy_T dz_T, \quad (4.43)$$

de modo que, sustituyendo la ecuación (4.42) en la (4.43), resulta:

$$U_R(y_R, z_R) = A_0 \frac{e^{ik(d_0 + d_R)}}{(i\lambda d_0)(i\lambda d_R)} \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda d_0} [(y_T - y_0)^2 + (z_T - z_0)^2]\right\} t(y_T, z_T) \cdot P(y_T, z_T) \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda d_R} [(y_R - y_T)^2 + (z_R - z_T)^2]\right\} dy_T dz_T, \quad (4.44)$$

o bien, desarrollando los cuadrados en las exponenciales y reagrupando:

$$U_R(y_R, z_R) = A_0 \frac{e^{ik(d_0 + d_R)}}{(i\lambda d_0)(i\lambda d_R)} e^{\frac{i\pi}{d_0}(y_0^2 + z_0^2)} e^{\frac{i\pi}{\lambda d_R}(y_R^2 + z_R^2)} \cdot \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} t(y_T, z_T) P(y_T, z_T) \exp\left\{-2\pi i \left[ y_T \left( \frac{y_R}{\lambda d_R} + \frac{y_0}{\lambda d_0} \right) + z_T \left( \frac{z_R}{\lambda d_R} + \frac{z_0}{\lambda d_0} \right) \right]\right\} dy_T dz_T. \quad (4.45)$$

En la expresión (4.45), a menos de factores de fase, se reconoce a la

transformada de Fourier de la transmitancia en amplitud.

Si se introduce ahora en la (4.45) la ecuación (4.26), junto con la diferencia de camino óptico dada por la (4.23), y se resuelve usando la relación de la (4.33), el campo resulta ser:

$$\begin{aligned}
 U_R(y_R, z_R) = & A_0 e^{-i\pi/2} e^{ik(d_0+d_R)} \left\{ \frac{T_0}{\lambda(d_0+d_R)} \exp\left\{ \frac{i\pi}{\lambda(d_0+d_R)} [(y_R-y_0)^2 + (z_R-z_0)^2] \right\} + \right. \\
 & + \beta\gamma \frac{f}{\lambda} \frac{1}{f_p(d_0+d_R)+d_0d_R} \exp\left\{ \frac{4\pi i}{\lambda} n'e' \right\} \exp\left\{ -\frac{i\pi}{\lambda} \frac{(y_0^2+z_0^2)}{f_p+d_0} \right\} \cdot \\
 & \cdot \exp\left\{ \frac{i\pi(f_p+d_0)}{\lambda[f_p(d_0+d_R)+d_0d_R]} \left[ \left(y_R - \frac{1}{1+\frac{d_0}{f_p}} y_0\right)^2 + \left(z_R - \frac{1}{1+\frac{d_0}{f_p}} z_0\right)^2 \right] \right\} + \\
 & + \beta\gamma \frac{*f}{\lambda} \frac{1}{f_p(d_0+d_R)-d_0d_R} \exp\left\{ -\frac{4\pi i}{\lambda} n'e' \right\} \exp\left\{ -\frac{i\pi}{\lambda} \frac{(y_0^2+z_0^2)}{f_p-d_0} \right\} \cdot \\
 & \cdot \exp\left\{ \frac{i\pi(f_p-d_0)}{\lambda[f_p(d_0+d_R)-d_0d_R]} \left[ \left(y_R - \frac{1}{1-\frac{d_0}{f_p}} y_0\right)^2 + \left(z_R - \frac{1}{1-\frac{d_0}{f_p}} z_0\right)^2 \right] \right\} \left. \right\} \cdot
 \end{aligned}
 \tag{4.46}$$

Llamando:

$$m_+ = \frac{1}{1 + \frac{d_0}{f_p}} \quad ; \quad m_- = \frac{1}{1 - \frac{d_0}{f_p}} \quad , \tag{4.47}$$

$$J = \beta\gamma \frac{f_p}{\lambda} \exp\left\{\frac{4\pi i}{\lambda} n' e'\right\} \quad , \quad (4.48)$$

$$D = \frac{T_o}{\lambda(d_o+d_R)} \quad , \quad (4.49)$$

$$g_+ = f_p(d_o+d_R) + d_o d_R \quad , \quad (4.50)$$

$$g_- = f_p(d_o+d_R) - d_o d_R \quad , \quad (4.51)$$

la expresión (4.46) se reduce a:

$$\begin{aligned} U_R(y_R, z_R) = & A_o e^{-i\pi/2} e^{ik(d_o+d_R)} \left\{ D \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda(d_o+d_R)} [(y_R-y_o)^2 + (z_R-z_o)^2]\right\} + \right. \\ & + \frac{J}{g_+} e^{\frac{i\pi(y_o^2+z_o^2)}{\lambda(f_p+d_o)}} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda} \frac{(f_p+d_o)}{g_+} [(y_R-m_+y_o)^2 + (z_R-m_+z_o)^2]\right\} + \\ & \left. + \frac{J^*}{g_-} e^{-\frac{i\pi(y_o^2+z_o^2)}{\lambda(f_p-d_o)}} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda} \frac{(f_p-d_o)}{g_-} [(y_R-m_-y_o)^2 + (z_R-m_-z_o)^2]\right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Con el fin de facilitar su posterior análisis, es conveniente distinguir, en la (4.52), tres términos, a saber:

$$U_R^0(y_R, z_R) = E_0 D \exp\left\{ \frac{i\pi}{\lambda (d_0 + d_R)} [(y_R - y_0)^2 + (z_R - z_0)^2] \right\} \quad , \quad (4.53)$$

$$U_R^1(y_R, z_R) = E_0 \frac{J}{g_+} e^{\frac{i\pi}{\lambda} \frac{(y_0^2 + z_0^2)}{(f_p + d_0)}} \exp\left\{ \frac{i\pi (f_p + d_0)}{\lambda g_+} [(y_R - m_+ y_0)^2 + (z_R - m_+ z_0)^2] \right\} \quad , \quad (4.54)$$

$$U_R^{-1}(y_R, z_R) = E_0 \frac{J}{g_-} e^{-\frac{i\pi}{\lambda} \frac{(y_0^2 + z_0^2)}{(f_p - d_0)}} \exp\left\{ \frac{i\pi (f_p - d_0)}{\lambda g_-} [(y_R - m_- y_0)^2 + (z_R - m_- z_0)^2] \right\} \quad (4.55)$$

donde

$$E_0 = A_0 e^{-i\pi/2} e^{ik(d_0 + d_R)}.$$

De aquí se puede interpretar que a cada punto del plano  $(y_R, z_R)$  arriban simultáneamente tres ondas esféricas que darán lugar a un proceso de interferencia, el cual permite registrar tanto en amplitud como en fase, la información procedente del objeto original.

Así, la intensidad que se almacena en la placa es:

$$I(y_R, z_R) = |U_R(y_R, z_R)|^2 \quad , \quad (4.56)$$

o bien

$$I(y_R, z_R) = |U_R^0(y_R, z_R)|^2 + |U_R^{-1}(y_R, z_R)|^2 + U_R^0(y_R, z_R) U_R^{1*}(y_R, z_R) + U_R^0(y_R, z_R) U_R^{-1*}(y_R, z_R) +$$

$$\begin{aligned}
& + |U_R^1(y_R, z_R)|^2 + U_R^1(y_R, z_R)U_R^{0*}(y_R, z_R) + U_R^1(y_R, z_R)U_R^{-1*}(y_R, z_R) + \\
& + U_R^{-1}(y_R, z_R)U_R^{0*}(y_R, z_R) + U_R^{-1}(y_R, z_R)U_R^{1*}(y_R, z_R). \quad (4.57)
\end{aligned}$$

Desarrollando la (4.57) por términos, se encuentra:

$$|U_R^0(y_R, z_R)|^2 + |U_R^1(y_R, z_R)|^2 + |U_R^{-1}(y_R, z_R)|^2 = A_o^2 \left\{ D^2 + |J|^2 \left( \frac{1}{g_+} + \frac{1}{g_-} \right) \right\}, \quad (4.58)$$

$$U_R^0(y_R, z_R)U_R^{1*}(y_R, z_R) = A_o^2 D \frac{J^*}{g_+} \exp\left\{ -\frac{i\pi d_o^2}{\lambda(d_o + d_R)g_+} \left[ \left(y_R + \frac{d_R}{d_o}y_o\right)^2 + \left(z_R + \frac{d_R}{d_o}z_o\right)^2 \right] \right\}, \quad (4.59)$$

$$U_R^1(y_R, z_R)U_R^{0*}(y_R, z_R) = \{U_R^0(y_R, z_R)U_R^{1*}(y_R, z_R)\}^*, \quad (4.60)$$

$$U_R^0(y_R, z_R)U_R^{-1*}(y_R, z_R) = A_o^2 D \frac{J}{g_-} \exp\left\{ \frac{i\pi d_o^2}{\lambda(d_o + d_R)g_-} \left[ \left(y_R + \frac{d_R}{d_o}y_o\right)^2 + \left(z_R + \frac{d_R}{d_o}z_o\right)^2 \right] \right\}, \quad (4.61)$$

$$U_R^{-1}(y_R, z_R)U_R^{0*}(y_R, z_R) = \{U_R^0(y_R, z_R)U_R^{-1*}(y_R, z_R)\}^*, \quad (4.62)$$

$$U_R^1(y_R, z_R)U_R^{-1*}(y_R, z_R) = \frac{A_o^2 J^2}{g_+g_-} \exp\left\{ \frac{2\pi i f d_o}{\lambda g_+g_-} \left[ \left(y_R + \frac{d_R}{d_o}y_o\right)^2 + \left(z_R + \frac{d_R}{d_o}z_o\right)^2 \right] \right\}, \quad (4.63)$$

y

$$U_R^{-1}(y_R, z_R) U_R^{1*}(y_R, z_R) = \{U_R^1(y_R, z_R) U_R^{-1*}(y_R, z_R)\}^* \quad (4.64)$$

Hasta ahora, entonces, se ha calculado la intensidad que recoge el medio fotosensible, a partir de la cual se obtiene su transmitancia en amplitud, en la manera usual, por medio de la expresión (4.25):

$$t'(y_R, z_R) = t'_o + \beta I(y_R, z_R) \quad (4.65)$$

Resta hallar la distribución de campo en el plano de Fourier, colocando a esté registro en un montaje experimental análogo al de la Figura IV.2 y analizar su significado físico.

Al igual que en la Sección IV.3, la lente de distancia focal  $f$ , es iluminada por una onda plana monocromática de longitud de onda  $\lambda$  y amplitud  $A_p$ , y la distancia del registro al plano focal posterior es  $d$ .

Definiendo al sistema de coordenadas en el plano de la transmitancia por  $y_T$ - $z_T$ , la ecuación resulta ser nuevamente de la forma:

$$U_f(y_f, z_f) = \frac{A_p \exp\{\frac{ik}{2d}(y_f^2 + z_f^2)\}}{i\lambda d} \frac{f}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t'(y_T, z_T) P(y_T \frac{f}{d}, z_T \frac{f}{d}) \cdot \exp\{-\frac{2\pi i}{\lambda d}(y_T y_f + z_T z_f)\} dy_T dz_T \quad (4.66)$$

$$\text{Denotando } T'_o = t'_o + \beta A_o^2 \left\{ D^2 + |J|^2 \left( \frac{1}{g_+} + \frac{1}{g_-} \right) \right\}, \quad (4.67)$$

y caracterizando por  $U_f^{nm*}(y_f, z_f)$  a la transformada de Fourier de los términos que componen a la transmitancia, descriptos por las fórmulas (4.58) a (4.64), a la vez que se definen:

$$M = \frac{d_R}{d_o} \quad , \quad (4.68)$$

$$F_1 = \frac{(d_o + d_R)}{d_o^2} g_+ \quad , \quad (4.69)$$

$$F_{-1} = \frac{(d_o + d_R)}{d_o^2} g_- \quad , \quad (4.70)$$

y

$$F_0 = \frac{g_+ g_-}{2f_p d_o^2} \quad , \quad (4.71)$$

se obtienen como resultado final, las siguientes ecuaciones, las que sumadas, conforman al campo resultante en el plano focal posterior de la lente:

a) De la (4.58)

$$U_f^0(y_f, z_f) = A_p \frac{e^{\frac{ik}{2d}(y_f^2 + z_f^2)}}{i\lambda d} \frac{f}{d} \delta\left(\frac{y_f}{\lambda d}, \frac{z_f}{\lambda d}\right) \quad , \quad (4.72)$$

la que representa una onda esférica que converge al plano focal, en el eje del sistema óptico, conocida como orden cero. Este término corresponde a una parte de la onda incidente sobre el registro fotográfico que no es difractada.

A partir de (4.59) y (4.60) se llega a :

$$\begin{aligned}
 \text{b) } U_f^{01*}(y_f, z_f) &= A_o^2 A_p D \frac{J}{g_+} \frac{f}{d} \beta \frac{F_1}{d} \exp(-i\pi/2) \exp\left\{-\frac{i\pi M^2}{\lambda(F_1+d)}(y_o^2+z_o^2)\right\} \\
 &\cdot \exp\left\{\frac{i\pi(F_1+d)}{\lambda d^2} \left[(y_f + \frac{Md}{F_1+d} y_o)^2 + (z_f + \frac{Md}{F_1+d} z_o)^2\right]\right\} ,
 \end{aligned}
 \tag{4.73}$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{c) } U_f^{10*}(y_f, z_f) &= A_o^2 A_p D \frac{J}{g_+} \frac{f}{d} \beta \frac{F_1}{d} \exp(i\pi/2) \exp\left\{-\frac{i\pi M^2}{\lambda(F_1-d)}(y_o^2+z_o^2)\right\} \\
 &\cdot \exp\left\{-\frac{i\pi(F_1-d)}{\lambda d^2} \left[(y_f - \frac{Md}{F_1-d} y_o)^2 + (z_f - \frac{Md}{F_1-d} z_o)^2\right]\right\} ,
 \end{aligned}
 \tag{4.74}$$

La (4.73) es una onda divergente, vista desde el plano focal, a una distancia de él dada por  $d^2/(F_1+d)$ , pero centrada en un punto de coordenadas  $\{Mdy_o/(F_1+d), Mdz_o/(F_1+d)\}$ , y la (4.74) es convergente, ubicada detrás del plano focal a  $d^2/(F_1-d)$ , y su punto de enfoque en las coordenadas  $\{Mdy_o/(F_1-d), Mdz_o/(F_1-d)\}$ .

Estos dos términos muestran la similitud del proceso con el de

la visualización de un holograma de Fourier. Sin embargo, para un holograma de Fourier convencional, las dos imágenes yacen en el mismo plano (el de la transformada), y tienen la misma magnificación. En este caso, recordando que las coordenadas del punto objeto eran  $(y_o, z_o)$ , se tienen dos magnificaciones distintas,  $Md/(F_1+d)$  y  $Md/(F_1-d)$ , y las imágenes están una delante y otra detrás del plano de Fourier, al igual que lo calculado en la Sección IV.3, para el diagrama de interferencia.

En la holografía por transformada de Fourier convencional de un objeto, debe emplearse una fuente de referencia puntual cuando se registra el holograma. Esta fuente de referencia se localiza en el plano principal del objeto, pero se ha demostrado<sup>(4)</sup> que puede estar ubicada en cualquier otro plano. Si éste es el caso, las imágenes resultantes no están enfocadas en el mismo plano y por ende sus magnificaciones no son iguales, tal como lo que se ha presentado en la discusión precedente.

Además, si en el esquema teórico desarrollado no se ha empleado un haz explícito de referencia, surge entonces la pregunta sobre cómo se ha generado.

La respuesta se basa en el hecho de que el interferograma actúa tanto como lente positiva como negativa.

De hecho, una lente forma imágenes de un objeto que serán reales o virtuales dependiendo de su posición relativa a ella.

Así, el punto ubicado en  $(y_o, z_o)$ , tiene dos imágenes formadas por el interferograma, lo que explica la forma del campo de la (4.52).

En la (4.53) se ve a la onda que proviene del objeto original, ubicado a la distancia  $(d_o+d_p)$  de la placa de registro. La (4.54) es una onda divergente desde una distancia  $g_+/(f_p+d_o)$  de la placa, en las coordenadas  $(m_+y_o, m_+z_o)$ , o lo que es lo mismo, una de las imágenes del objeto dada por el interferograma.

La (4.55) no es más que la restante imagen, que se encuentra a  $g_-/(f_p-d_o)$  de la placa, y centrada en  $(m_-y_o, m_-z_o)$ .

Son, de hecho, estas imágenes las que juegan el papel de haz de referencia, y obviamente no están en el mismo plano que la fuente objeto.

Siguiendo con el análisis, se encuentran de (4.61) y (4.62):

$$\begin{aligned}
 \text{d) } U_f^{0,-1*}(y_f, z_f) &= A_o^2 A_p D \frac{J}{g_-} \frac{f}{d} \frac{F-1}{d} \exp\left\{\frac{i\pi M^2}{\lambda(F_{-1}-d)}(y_o^2+z_o^2)\right\} \cdot \beta \\
 &\cdot \exp\left\{-\frac{i\pi(F_{-1}-d)}{\lambda d^2} \left[(y_f - \frac{Md}{F_{-1}-d} y_o)^2 + (z_f - \frac{Md}{F_{-1}-d} z_o)^2\right]\right\},
 \end{aligned}
 \tag{4.75}$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{e) } U_f^{-1,0*}(y_f, z_f) &= A_o^2 A_p D \frac{J^*}{g_-} \frac{f}{d} \frac{F-1}{d} \exp(-i\pi/2) \exp\left\{-\frac{i\pi M^2}{\lambda(F_{-1}+d)}(y_o^2+z_o^2)\right\} \cdot \beta \\
 &\cdot \exp\left\{\frac{i\pi(F_{-1}+d)}{\lambda d^2} \left[(y_f + \frac{Md}{F_{-1}+d} y_o)^2 + (z_f + \frac{Md}{F_{-1}+d} z_o)^2\right]\right\},
 \end{aligned}
 \tag{4.76}$$

que son dos ondas una convergente hacia  $d^2/(F_{-1}-d)$  y la otra divergente desde  $d^2/(F_{-1}+d)$ , y con magnificaciones  $Md/(F_{-1}-d)$  y  $Md/(F_{-1}+d)$ , respectivamente.

Por último, las restantes componentes del campo se expresan a partir de (4.63) y (4.64) como

$$\text{f) } U_f^{1,-1*}(y_f, z_f) = A_o^2 A_p \frac{\beta J^2}{g_+ g_-} \frac{f F_o}{d^2} \exp\left\{\frac{i\pi M^2}{\lambda(F_o-d)}(y_o^2+z_o^2)\right\}.$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{i\pi(F_o-d)}{\lambda d^2} \left[ \left(y_f - \frac{Md}{F_o-d} y_o\right)^2 + \left(z_f - \frac{Md}{F_o-d} z_o\right)^2 \right]\right\} \quad , (4.77)$$

y

$$g) U_f^{-1}, 1^* (y_f, z_f) = A_o^2 A \frac{\beta J^*{}^2}{p g_+ g_-} \frac{f F_o}{d^2} \exp(-i\pi/2) \exp\left\{-\frac{i\pi M^2}{\lambda(F_o+d)} (y_o^2 + z_o^2)\right\}.$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i\pi(F_o+d)}{\lambda d^2} \left[ \left(y_f + \frac{Md}{F_o+d} y_o\right)^2 + \left(z_f + \frac{Md}{F_o+d} z_o\right)^2 \right]\right\} \quad , (4.78)$$

donde se reconocen, nuevamente, a una onda convergente, la (4.77), hacia  $d^2/(F_o-d)$  con aumento  $Md/(F_o-d)$ , y una divergente, la (4.78), desde  $d^2/(F_o+d)$ , con aumento  $Md/(F_o+d)$ .

Entonces, el campo total reconstruye a tres objetos distintos. Esto no es ilógico, si se piensa que una fuente de referencia es a su vez objeto para la otra. Por ello, en el plano de Fourier se encuentran el objeto y sus dos imágenes generadas por el interferograma.

La determinación de cuál de estas ondas representa a la original y cuál corresponde a las imágenes, depende de la distancia  $d_o$  de la fuente al registro de interferencia, y de  $f_p$ , la distancia focal de dicho registro.

El análisis detallado de los diferentes casos se realizará en el siguiente Capítulo. Sin embargo ahora, se puede generalizar el proceso para el caso en que el objeto es extenso, aplicando el principio de superposición. Esto es, considerar al objeto como una superposición de fuentes puntuales, siendo válida para cada una de ellas todo lo expuesto anteriormente.

De esta forma, se ha demostrado teóricamente la factibilidad de obtener un holograma de Fourier sin hacer uso de lentes ni de haz explí-

cito de referencia, lo que brinda una interesante posibilidad en su potencial aplicación al procesamiento óptico de la información, destacándose la simpleza y versatilidad del montaje experimental propuesto.

#### IV-5 ANALISIS DEL MODO 1 EN SU DISPOSICION DE MULTIPLE ENFOQUE

En el Capítulo III se presentaron dos disposiciones de iluminación para el llamado Modo de Operación 1. A lo largo de dicho Capítulo, así como en lo tratado hasta ahora en éste, se ha puesto énfasis en una sola de las disposiciones, justamente en aquella que produce un solo punto de enfoque del interferómetro.

En esta Sección se analizará por extensión, en base al principio de superposición, a la restante condición de iluminación, representada por la Figura III.1(a).

Se observa en este caso la presencia de varias fuentes puntuales, además de la existencia, como fondo de referencia, de una superposición de ondas planas.

Precisamente estas ondas planas producirán, con cada fuente puntual, una figura de interferencia tal como la descrita en la Sección III-4.1.

Si se interpone una placa fotográfica, la amplitud que ella recibe, dado que la fuente de iluminación es monocromática y coherente, es una suma de amplitudes de la forma descrita por la ecuación (3.23).

De esta manera se obtiene un interferograma tal que al ser iluminado con una onda plana genera una serie de focos, reales y virtuales, dispuestos simétricamente con respecto al medio fotográfico.

Se interpreta este hecho como la combinación de varias lentes positivas y negativas, más exactamente una de cada una por cada punto de enfoque que determina el interferómetro. Sus distancias focales están dadas por la ubicación de estas fuentes puntuales con respecto al medio fotosensible.

De manera que este registro de interferencia genera de un objeto múltiples imágenes. Entonces, un holograma de Fourier obtenido mediante él, da lugar a la formación de muchos planos de enfoque, cada uno con réplicas del objeto, lo cual lleva a una distorsión en el proceso final de visualización.

De todas maneras, una posible aplicación del registro interferen-

cial de múltiple enfoque sería la alineación, dado que estos puntos definen una línea recta en el espacio.

## REFERENCIAS

1. M. Horman and H. Chau, Zone Plate Theory Based on Holography ,  
Appl. Opt. Vol. 6, N° 2, pág. 317 (1967).
2. J. Goodman, Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill, New York, 1968.
3. N. Rodriguez, Tesis Doctoral, Fac. de Cs. Exactas, U.N.L.P., 1982.
4. J. Ojeda-Castañeda and S. Guel-Sandoval, Generalized Holographic  
Formation of a Lenless Fourier Transform 1 :Different Geometries,  
Appl. Opt., Vol. 18, N° 21, pág. 3550 (1979).
5. G. N. Stroke and D. G. Falconer, Phys. Lett. 13, 306 (1964).

## CAPITULO V

- V.1            Introducción.
- V.2            Registro de interferencia: Consideraciones generales.
- V.3            Holografía haciendo uso del interferograma: Resultados experimentales.
- V.4            Aplicación al estudio de deformaciones.
- V.5            Holografía con el interferómetro.

## V-1 INTRODUCCION

En este Capítulo se presentan diversas pruebas experimentales que confirman las teorías expuestas, en cuanto a la posibilidad de obtener hologramas de Fourier sin lentes, unido al hecho de no hacer uso de un haz explícito de referencia.

En las distintas Secciones que siguen, se pueden apreciar las características de tales registros, en lo que respecta a la definición, tanto de la imagen, como de sus detalles.

Se destaca también una aplicación general al estudio de deformaciones, la que permite la observación simultánea, en el plano de la transformada de franjas de igual deformación sobre la imagen de la muestra sometida a la prueba, en los órdenes difractados, y franjas rectas, clásicas del fenómeno "speckle", en el orden cero, las que dan cuenta en su espaciado de la magnitud promedio de dicha deformación.

Para finalizar, en la última Sección, se comenta la posibilidad del uso, para la generación de hologramas, del dispositivo interferométrico en sí, mostrando una prueba experimental de tal aseveración, que no se diferencia en la calidad de reconstrucción en el plano focal, de otra presentada en la Sección V-3, lograda con el interferograma, todo lo cual implica la apertura de una nueva línea de investigación.

## V-2 REGISTRO DE INTERFERENCIA: CONSIDERACIONES GENERALES.

Se ha discutido extensamente el comportamiento de la figura de interferencia obtenida con la cavidad resonante parabólica, que obedece al de la superposición de una lente convergente y otra divergente, además de relacionar este hecho con el de haber generado un holograma "ideal" de una fuente puntual.

En esta Sección se analiza al formalismo que describe al campo que se encuentra en el plano de Fourier, a partir de tal diagrama y que fue obtenido en el Capítulo IV.

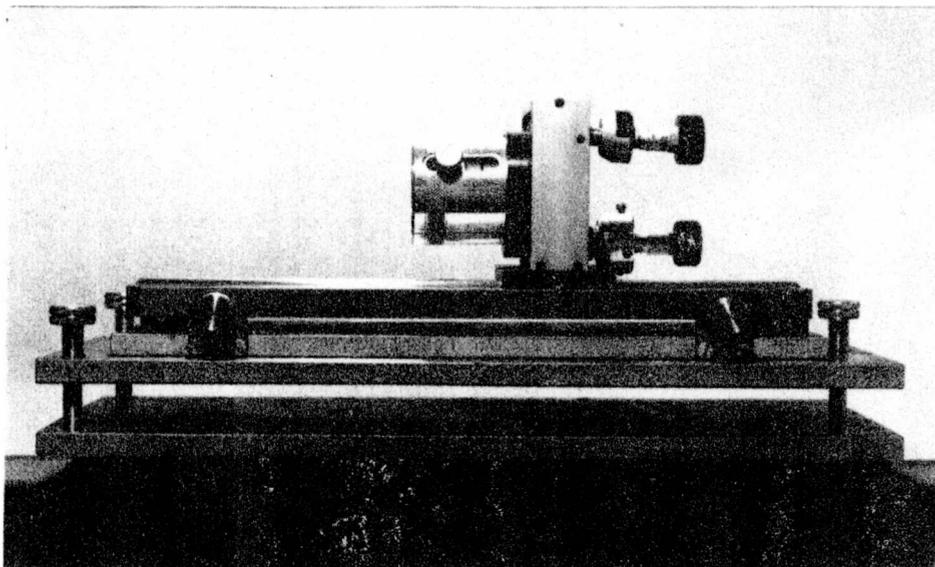
Por otra parte, en el Capítulo III se presentó un gráfico del perfil en intensidad de la figura que se forma a la salida del nuevo interferómetro. Es así, que la ecuación (3.37) da cuenta de la simetría circular que posee esta figura, a la vez que permite calcular la cantidad de zonas que contiene tal red de difracción. Mediante un proceso iterativo por computadora, se halló que existen aproximadamente 1200 zonas para un disco de radio 2,5 cm.

La fotografía V.1 muestra al interferómetro de caras parabólicas, encapsulado en un aparato provisto de tornillos micrométricos y todo montado sobre un sistema que permite su alineación.

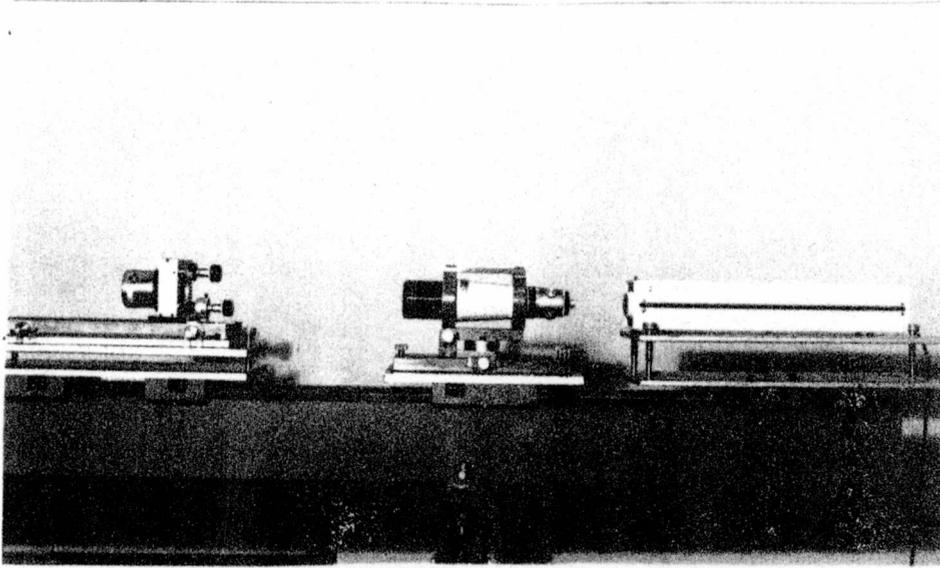
La configuración experimental para el registro del interferograma, aparece en la fotografía V.2, en la que se detallan el láser utilizado junto con el sistema expensor-colimador, del cual emergen las ondas planas que inciden en el resonador. El conjunto opera sobre un banco óptico, ubicándose la placa de registro a continuación del dispositivo de interferencia.

Por la cantidad de zonas a resolver, el material fotosensible debe ser de alta resolución, y revelan la imposibilidad de levantar un perfil microdensitométrico, análogos a los presentados en el Capítulo I, que permita comprobar esta estructura.

Sin embargo, la existencia de esta red, puede ser detectada por un método indirecto, que al mismo tiempo corrobora la validez de la metodología y aproximaciones empleadas en la delineación de la teoría.



Fotografía v - 1



Fotografía v - 2

La ecuación (4.37), junto a la (4.24), dan la distancia focal del interferograma como:

$$f_p = \frac{x}{n\left\{1 - \frac{3ne'}{n'x}\right\}} \quad , \quad (5.1)$$

siendo  $x$  la distancia que media entre el punto de enfoque, originado por resonador, y la placa de registro,  $n$  y  $n'$  son los índices de refracción del medio y el material del interferómetro, respectivamente, y  $e'$  es el espesor en el eje óptico del dispositivo corrector parabólico-plano.

Como era lógico de preveer, dada la forma de la transmitancia del registro, expresada por la (4.26), al ser iluminado por una onda plana, reconstruye a dos frentes, uno divergente y otro convergente, con respecto a la placa.

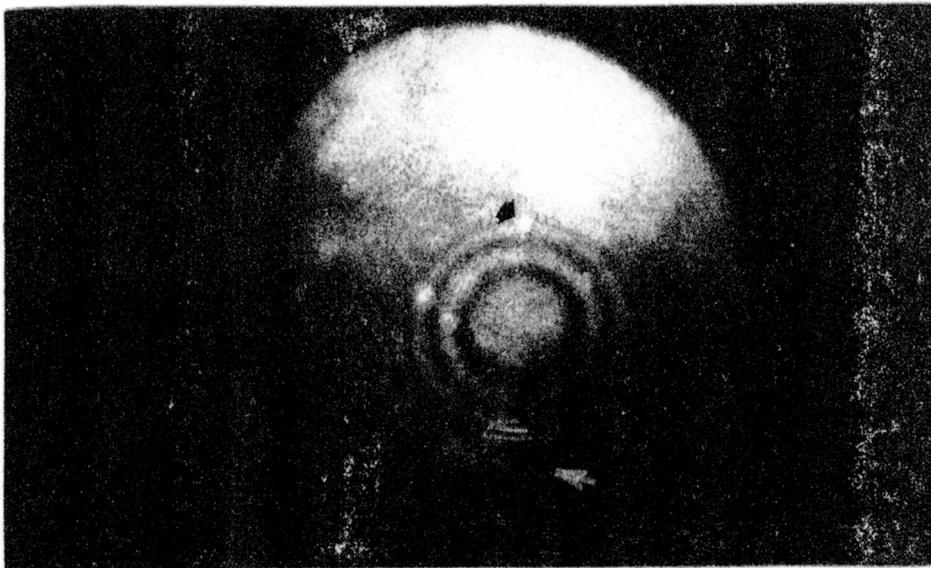
Para distintos valores del parámetro  $x$  se logran diferentes distancias focales, hecho que se confirma con las experiencias, las que también demostraron la exactitud de la (5.1).

Una de tales pruebas se ve en la fotografía V.3, notando por las flechas a los puntos focales anterior y posterior. La fuente puntual virtual está en foco en la fotografía, lo que resta resolución a la imagen real, pero pone de manifiesto el caracter holográfico de la reconstrucción.

En lo que respecta a la distribución del campo en el plano de Fourier, la resolución de la ecuación (4.27), da como resultado la ecuación (4.38), que contiene tres términos. Uno de ellos describe a una onda esférica que converge al eje óptico, en el plano focal posterior de la lente transformadora, y es la porción de la onda que incide sobre el interferograma y no es difractada. Es lo que se conoce como el orden cero del plano de las frecuencias.

Otro de los términos responde, a menos de factores de fase, a una onda esférica con origen en:

$$F = \frac{d^2}{f_p - d} \quad , \quad (5.2)$$



Fotografía v - 3

y, similarmente, el restante se corresponde con una onda esférica que surge de:

$$F' = \frac{d^2}{f_p + d} \quad , \quad (5.3)$$

siendo ambas distancias medidas con respecto al plano focal.

La onda asociada a  $F$  es convergente al eje óptico, hacía atrás del plano de las frecuencias, siempre que la distancia focal del interferograma,  $f_p$ , sea mayor que  $d$ .

Conviene recordar que  $d$  es la distancia que separa al registro del plano focal, y ofrece la ventaja, según se recalcó en el Capítulo IV, de que la escala está bajo control del experimentador.

De esta forma, si  $f_p$  es menor que  $d$ , la onda pasará a ser divergente, y en el caso de ser ambos parámetros iguales, se ve una onda plana.

En cambio,  $F'$  es siempre positiva, por lo que la onda que representa aparece como divergente desde esta distancia con respecto al plano de Fourier.

Estas fuentes puntuales no son más que las réplicas de la fuente puntual que fue creada por el interferómetro, y se presentan bajo la forma característica de observación de un holograma de Fourier sin lentes, con la salvedad de que no están en el plano de las frecuencias.

Cabe acotar que cualquiera sea el valor de  $d$ , se cumple que  $|F|$  es mayor que  $|F'|$ .

Un razonamiento similar, aplicando el principio de superposición, indica que un registro de la salida del Modo 2, presentará varios puntos de enfoque, hecho que la experiencia confirma.

Pero se recalca que en este caso, no se sigue la ley de las placas zonales de Fresnel, ni las generalizadas, sino más bien una del tipo descrita por la (5.1).

Una vez verificadas las características del registro de interferencia, resta por analizar las ecuaciones que rigen el almacenamiento y posterior reconstrucción del frente de ondas.

Se comenzó por resolver la respuesta impulsiva del sistema que representaba al diagrama de interferencia como pupila. Para ello se colocó una fuente puntual en las coordenadas  $(y_o, z_o)$ , aplicando luego la difracción de Fresnel, para encontrar el campo que sale de la transmitancia y arriba al plano de registro, en donde se coloca un medio fotosensible.

Así, de la fórmula simplificada (4.52), se encuentra que a cada punto del plano  $y_R-z_R$ , llegan tres ondas.

Una de ellas es de la forma:

$$C \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda(d_o+d_R)} [(y_R-y_o)^2+(z_R-z_o)^2]\right\} \quad , \quad (5.4)$$

con  $d_o$  distancia de la fuente objeto a la pupila y  $d_R$  de ésta a la placa.

Se reconoce en la (5.4) a una onda esférica que proviene de la fuente puntual original, y que no ha sido afectada por el diagrama que contiene la pupila, más que por un factor de atenuación.

Otra onda es:

$$C' \exp\left\{\frac{i\pi(f_p+d_o)}{\lambda g_+} [(y_R-m_+y_o)^2+(z_R-m_+z_o)^2]\right\} \quad , \quad (5.5)$$

donde  $g_+$  y  $m_+$  vienen dados por la (4.50) y (4.47) respectivamente.

La restante:

$$C'' \exp\left\{\frac{i\pi(f_p-d_o)}{\lambda g_-} [(y_R-m_-y_o)^2+(z_R-m_-z_o)^2]\right\} \quad , \quad (5.6)$$

estando  $g_-$  expresado por la (4.51) y  $m_-$  por la (4.47).

Estas ondas se originan en puntos que, para una dada posición de la placa fotosensible, dependen de la disposición relativa entre la fuente puntual y la distancia focal del interferograma, y a través de los factores  $m_+$  y  $m_-$ , de la posición de dicha fuente.

La explicación es sencilla si se hace referencia al hecho de que el interferograma actúa como lente convergente y divergente, ya que cada una de ellas va a generar independientemente una imagen, real o virtual, de la muestra original, y estas, por lo tanto, servirán como haz de referencia para la obtención del holograma.

Esta superposición de ondas es más de la requerida para producir el fenómeno de interferencia holográfica, por esto surgen los siete términos representados por las ecuaciones (4.58)-(4.64), los cuales dan lugar a la existencia de otros tantos términos en la representación de la distribución de campo en el plano de Fourier, tal como se demuestra al final de la Sección IV.3.

Pormenorizando el análisis, la (4.72) representa al clásico orden cero del plano de las frecuencias, indicado por la función delta de Dirac, centrada en el origen.

Las (4.73) y (4.74) reconstruyen a un par de imágenes, réplicas del objeto original y son creadas por la interferencia entre la muestra y la onda proveniente de una de las imágenes que crea el interferograma, representada por la (5.5).

Un examen detenido de ambas ecuaciones puede conducir a la discusión de resultados interesantes.

El valor de  $F_1$  rige las posiciones relativas de estas reconstrucciones con respecto al plano de Fourier, así como también determina los aumentos de cada una.

En efecto:

$$g_+ = f_p (d_o + d_R) + d_o d_R \quad , \quad (5.7)$$

es una cantidad mayor que cero, puesto que tanto  $d_o$  como  $d_R$  son siempre positivas, de acuerdo a como fueron definidas, por ende

$$F_1 = g_+ \frac{(d_o + d_R)}{d_o^2}, \quad (5.8)$$

tambi3n es positivo. De esta forma, la (4.73) va a ser la representaci3n de una imagen que siempre estar3 delante del plano de Fourier a una distancia  $d^2/(F_1 + d)$ .

En particular, si  $F_1$  es mayor que  $d$ , la (4.74) es una imagen que se encuentra detr3s del plano de Fourier, y de las magnificaciones respectivas se desprende que, en esta situaci3n, las frecuencias en una imagen son las conjugadas en la otra, hecho que indica que una est3 invertida con respecto a la otra. Nuevamente se est3 ante una representaci3n caracter3stica de Fourier.

El tama1o de las reconstrucciones difiere uno del otro, siendo m3s grande la que se encuentra detr3s.

Por el contrario, si  $F_1$  fuera menor que  $d$ , las dos im3genes estar3an delante del plano focal, pero sin invertirse una respecto de la otra, sin embargo se mantendr3n las relaciones entre las dimensiones de las mismas.

Estas ser3n iguales si y s3lo si  $F_1$  vale cero, lo que implica la anulaci3n de  $g_+$ , pero dado su definici3n, 3sto no puede suceder.

En forma similar, la (4.75) y la (4.76), surgen de la interferencia entre la onda objeto y la representada por la (5.6). Ambas muestran las mismas im3genes ya descriptas, pero en otra posici3n y diferentes magnificaciones. Ellas dependen ahora de  $F_{-1}$ , dado por:

$$F_{-1} = g_- \frac{(d_o + d_R)}{d_o^2}, \quad (5.9)$$

con

$$g_- = f_p (d_o + d_R) - d_o d_R \quad , \quad (5.10)$$

que indica que el signo de  $g_-$  condicionará a este parámetro.

Si  $g_-$  es positivo, la (4.76) es una onda originada delante del plano de Fourier, y la (4.75) una que se enfoca detrás del mismo, siempre que  $F_{-1}$  sea mayor que  $d$ , caso contrario, pasará a encontrarse delante. En cuanto a las magnificaciones, también son distintas e indican que una está invertida respecto de la otra, y si  $F_{-1}$  es menor que  $d$ , las dos tendrán el mismo sentido.

Si  $g_-$  es negativo, se invertirán exactamente las condiciones que representan la (4.75) y (4.76), que acaban de especificarse.

Una situación particularmente interesante es la que se presenta cuando  $g_-$  se anula, ya que de (5.10) se encuentra que ello se satisface cuando:

$$\frac{1}{f_p} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_R} \quad , \quad (5.11)$$

que no es otra que la ecuación de las lentes.

O sea, si la placa de registro es colocada en el plano en que se cumple la (5.11),  $F_{-1}$  se hace cero, resultando que las ondas aparecen generadas desde una distancia  $d$  respecto del plano focal, lo cual no es más que decir que provienen de la placa misma, recordando que ésta se encuentra justamente a esa distancia, y ambas con la misma magnificación  $M=d_R/d_o$ .

La explicación reside en que, en realidad, al satisfacer la condición de las lentes, no se está haciendo sino lo que se conoce en general con el nombre de holograma "imagen". Precisamente esta clase de holograma se obtiene al formar, con un sistema óptico, la imagen del objeto sobre la placa de registro.

En lo que respecta a las (4.77) y (4.78), que surgen de la interferencia entre las ondas que provienen de las imágenes del objeto, creadas por el

interferograma, sucede otro tanto.

Esto es así, porque el parámetro que rige el enfoque para este caso es:

$$F_0 = \frac{g_+g_-}{2f_p d_o^2} , \quad (5.12)$$

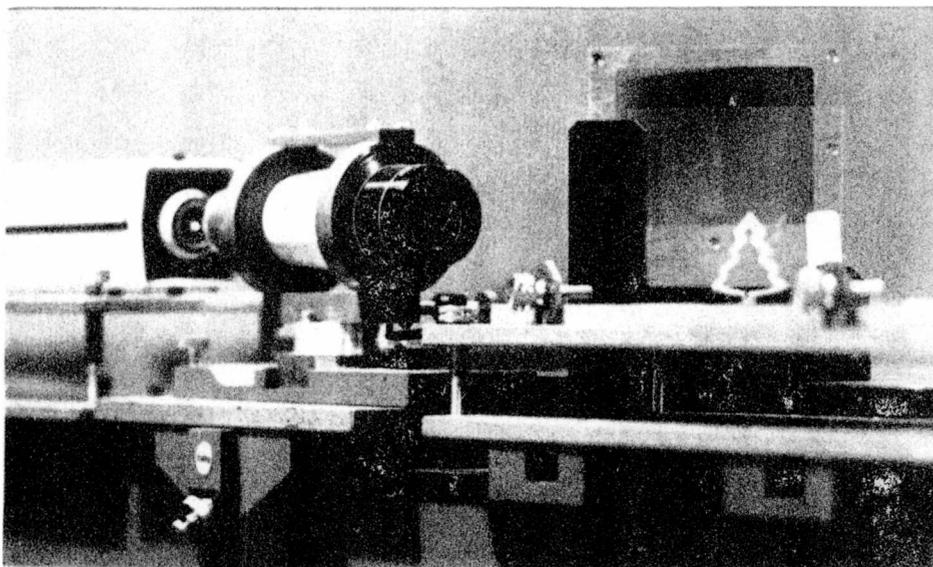
que se anula, al igual que  $F_{-1}$ , para  $g_- = 0$ , factor que determina una situación análoga a la descrita. Para valores de  $g_-$  tanto positivos, como negativos se observan las mismas condiciones discutidas para las ondas anteriores.

En resumen, se desprende de lo expuesto que para una disposición arbitraria del objeto, el proceso final de reconstrucción en el plano de Fourier, presenta a lo sumo tres pares de imágenes, donde cada par tiene distintas magnificaciones entre sí. Los planos de enfoque tampoco son los mismos, y dado que en general  $F_1 \neq F_{-1} \neq F_0$  no habría superposición entre éstos.

La simpleza de los montajes experimentales para la toma de los hologramas queda de manifiesto en la foto V.4, en donde se aprecian los elementos utilizados. Un láser continuo de He-Ne, de 5 mw de potencia, el sistema expensor-colimador que ilumina la escena a ser registrada, el objeto, el interferograma en un portaplacas adecuado y una placa de registro de alta resolución, constituyen los elementos necesarios para llevar a cabo las pruebas.

Las tomas del plano de Fourier fueron realizadas colocando una superficie difusora de vidrio, a modo de pantalla, que si bien facilitó el registro, introdujo "speckle", el cual afectó de alguna manera la calidad de la imagen.

Un comentario aparte merecen los medios fotosensibles empleados, que en todos los casos fueron placas. Dado las distintas configuraciones experimentales, ya sea por reflexión o transmisión, las condiciones de iluminación variaban drásticamente, exigiendo el uso de emulsiones de las llamadas



Fotografía v - 4

lentas, tal el caso de la 649-F, las de respuesta media, como la 120-02, o las rápidas 131-02, siendo en todas ellas una característica común el poder resolver una densidad de entre 2000 y 3000 líneas por milímetro.

Se fabricaron interferogramas de distintas distancias focales en 649-F o 131-02 y posteriormente, eran sometidos a un proceso de blanqueado con el fin de aumentar su eficiencia de difracción, recibiendo igual tratamiento algunos de los resultados presentados.

La foto V.5 muestra la reconstrucción de una fuente puntual, ubicada fuera del eje del sistema. Este registro está enfocado en el plano de Fourier y abarcó sólo dos imágenes, las más cercanas al orden cero, por tal motivo, los planos se ven desenfocados.

Otro aspecto a resaltar es la intensidad relativa entre las imágenes, que depende de los valores de las constantes de las emulsiones fotosensibles, de las ondas de iluminación y reconstrucción, y para casos particulares de los parámetros que diferencian los distintos enfoques.

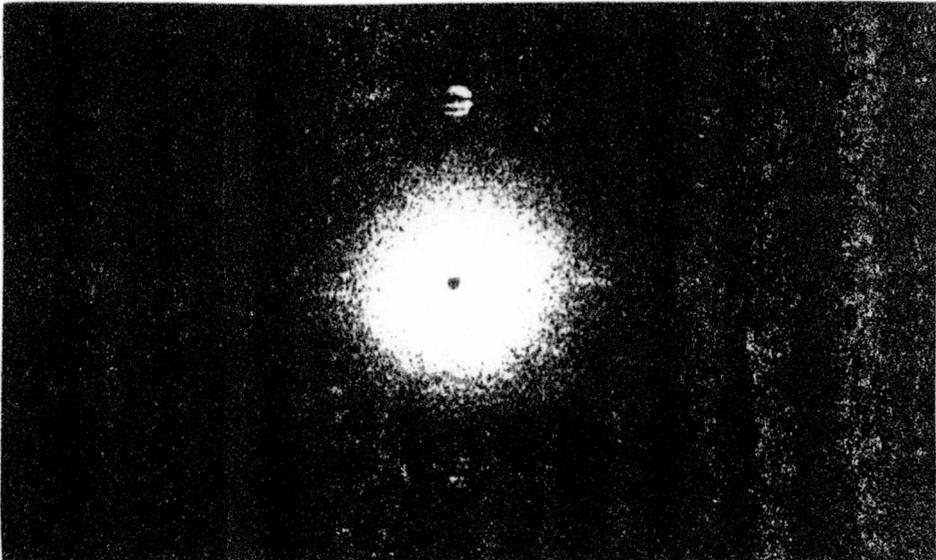
Un ejemplo representativo es la foto V.6, en la que el objeto es una tuerca obtenido por reflexión, y se ha sobreexposto intencionalmente para permitir observar la presencia de los tres pares de imágenes, pudiéndose ver la diferencia entre el tamaño y las intensidades de las mismas.

La foto V.7, es la reconstrucción de un letrero con la palabra MOTOR, siendo indudable que la calidad final de la reconstrucción está seriamente afectada por la simultaneidad de estas imágenes.

Si bien se las puede separar en el plano de las frecuencias, manejando los aumentos, mediante las posiciones relativas al interferograma del objeto y la placa de registro, esto no representa una solución al problema.

Pero si se recuerda la posibilidad que brinda el hecho de que se coloque al objeto y la placa fotosensible de tal suerte que se satisfaga la condición de las lentes, expresada por la (5.11), se logrará la existencia de un sólo par de imágenes.

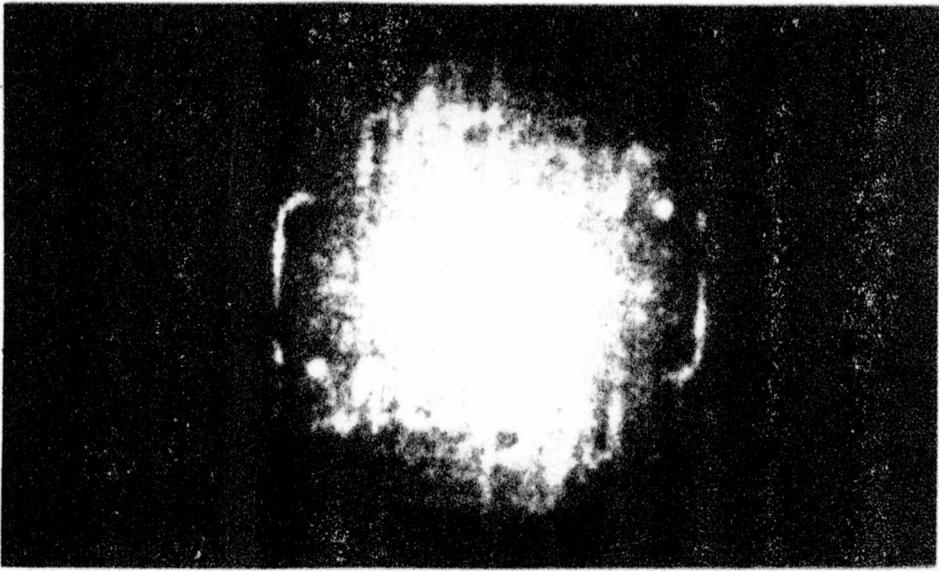
La foto V.8(a) muestra a un objeto sencillo, la V.8(b) una de sus imágenes enfocada entre la placa y el plano focal, y la V.8(c), la otra más allá del plano de Fourier. En la V.9(a) se ilustra una muestra con más detalles, la V.9(b) sus dos imágenes desenfocadas en el plano de las fre-



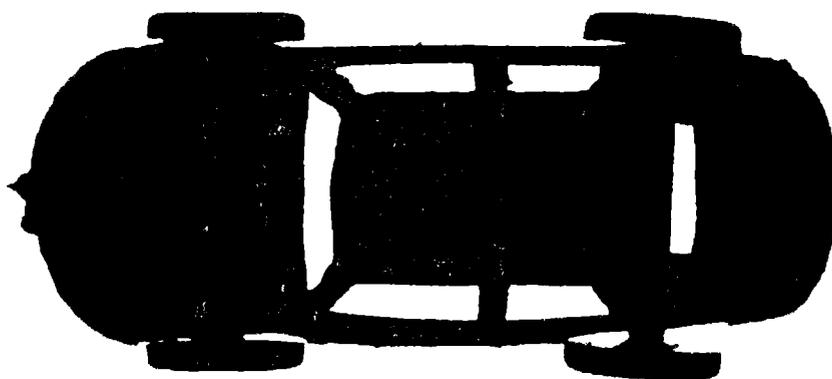
Fotografía v - 5



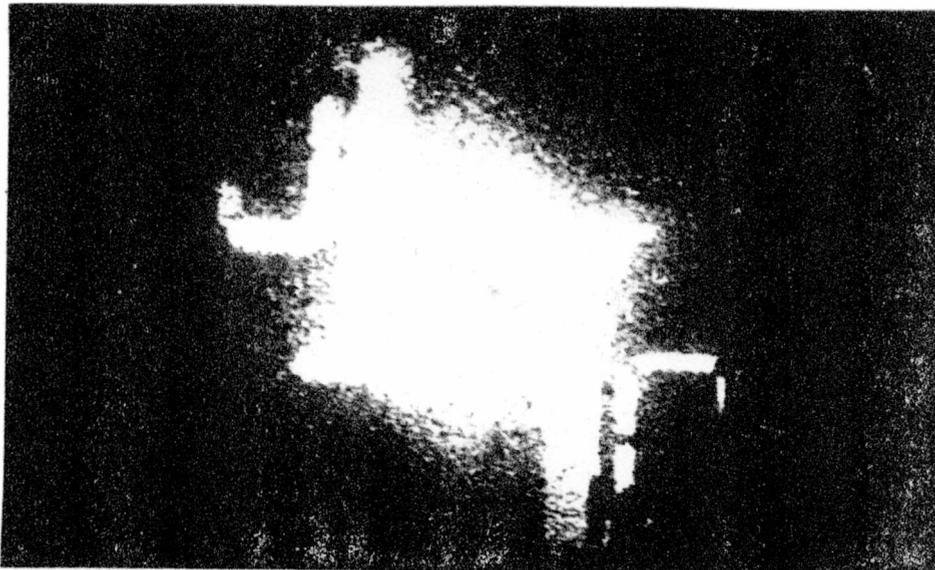
Fotografia v - 6



Fotografía v - 7



Fotografía v - 8 (a)



Fotografía v - 8 (b)



Fotografía v - 8 (c)

cuencias, y en la V.9(c) una de ellas bien definidas y su conjugada completamente desdibujada.

En estas situaciones, se han confrontados los valores experimentales con los teóricos, confirmando su concordancia.

Para ilustrar el grado de resolución obtenible, se registró un objeto con más detalles, según la foto V.10(a). La V.10(b) representa al plano de Fourier, por último las V.10(c) y (d) las reconstrucciones correspondientes.

A pesar de que los dos planos imagen no pueden estar en el plano de Fourier, si se manejan cuidadosamente los valores de los parámetros involucrados, puede lograrse que no se aparten demasiado de él, quedando prácticamente en foco, con muy buena resolución y sin pérdida de detalle.

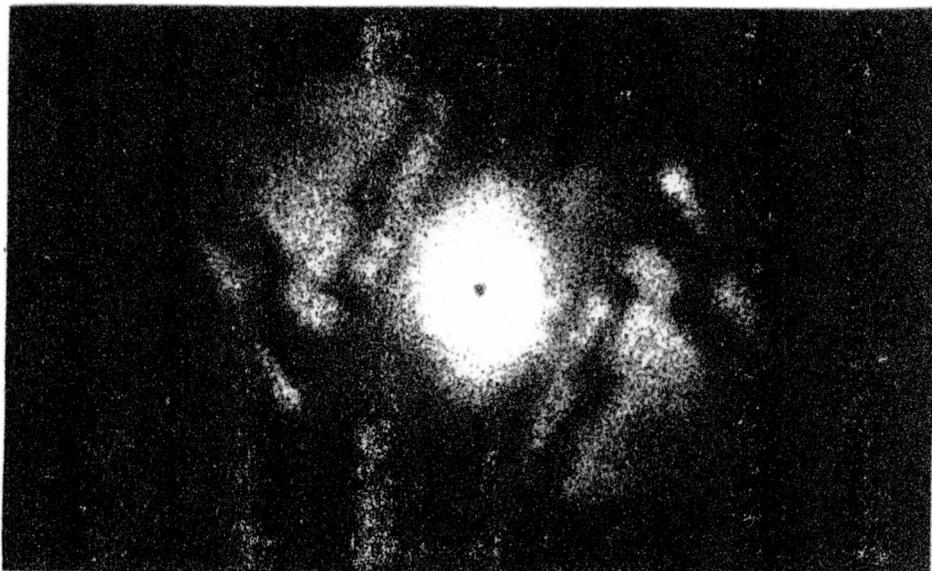
El motivo de la V.11(a) contiene como fondo altas frecuencias espaciales, y la V.11(b) sus correspondientes imágenes resueltas en el plano de la transformada.

De esta forma se ha podido comprobar la teoría enunciada en el Capítulo IV. Asimismo, se ha presentado lo que configura una primera aplicación al procesamiento de imágenes, al poner de manifiesto ciertas propiedades básicas de los hologramas de Fourier.

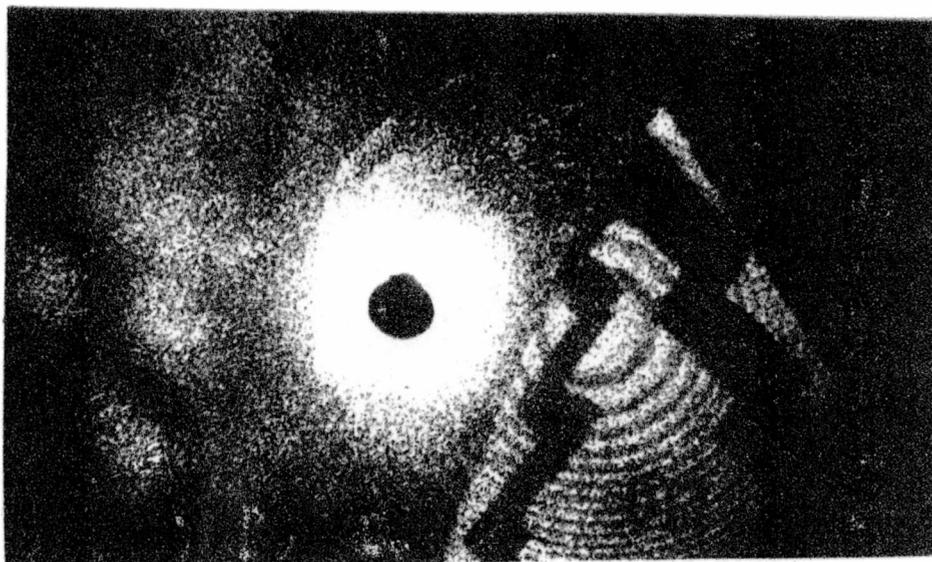
En la Sección V.4, se analiza una aplicación particular, que amplía la aplicabilidad de las técnicas de Fourier en el uso de esta forma de registro.



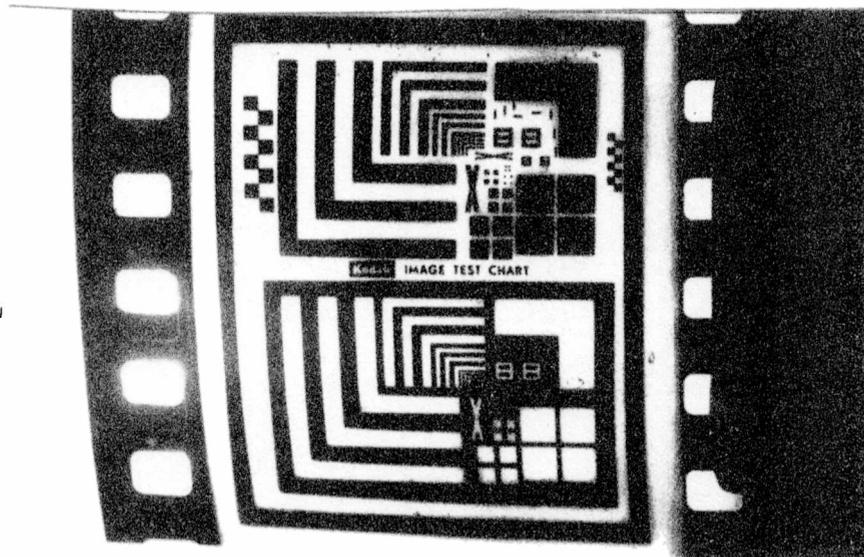
Fotografia v - 9 (a)



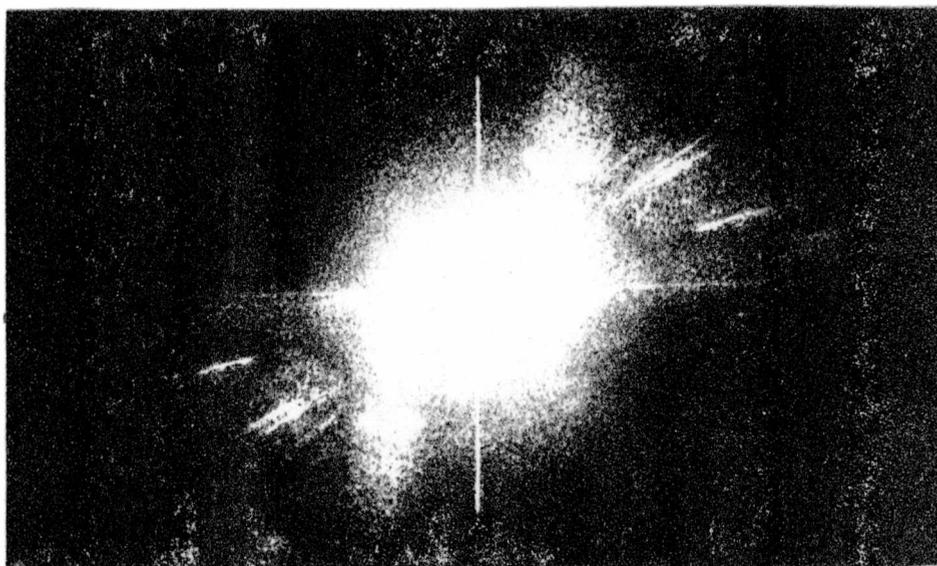
Fotografía v - 9 (b)



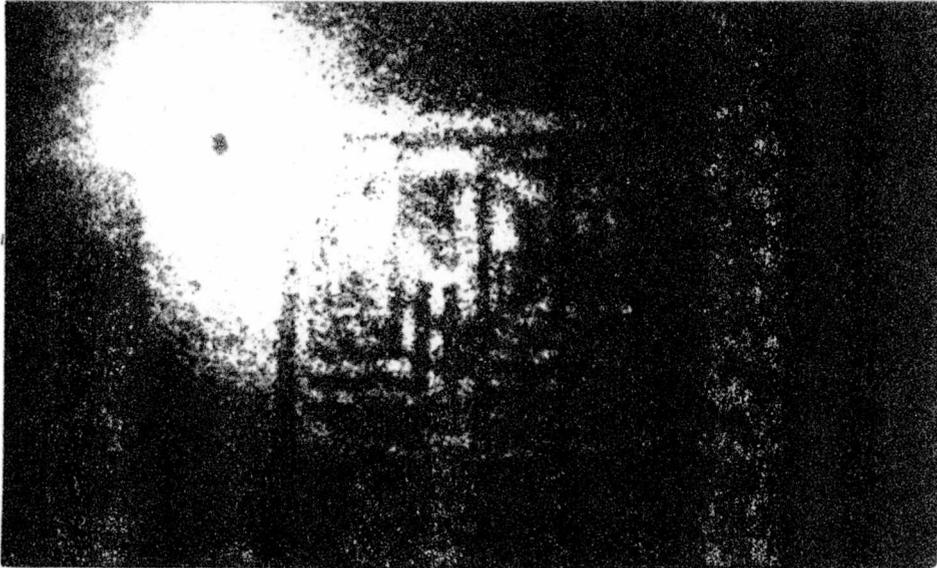
Fotografía v - 9 (c)



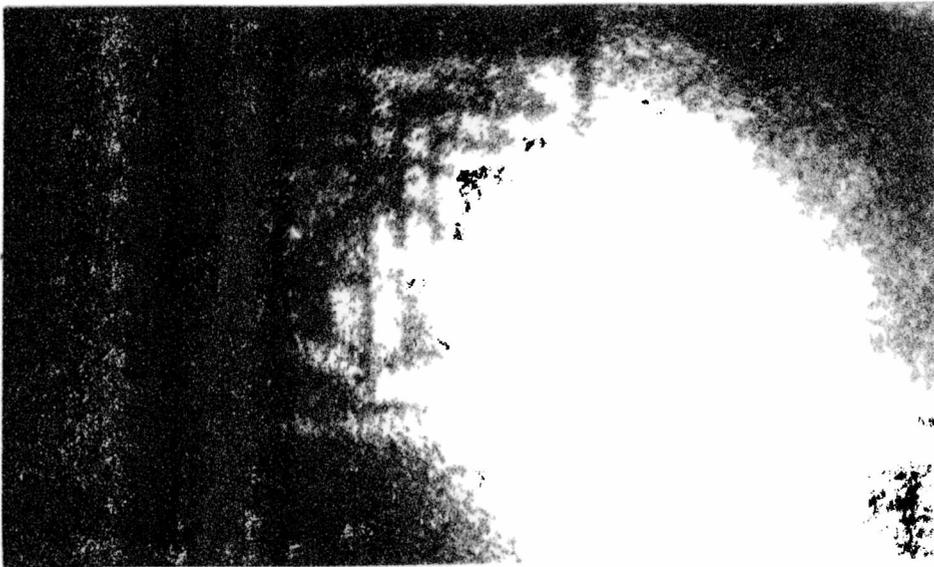
Fotografía v - 10 (a)



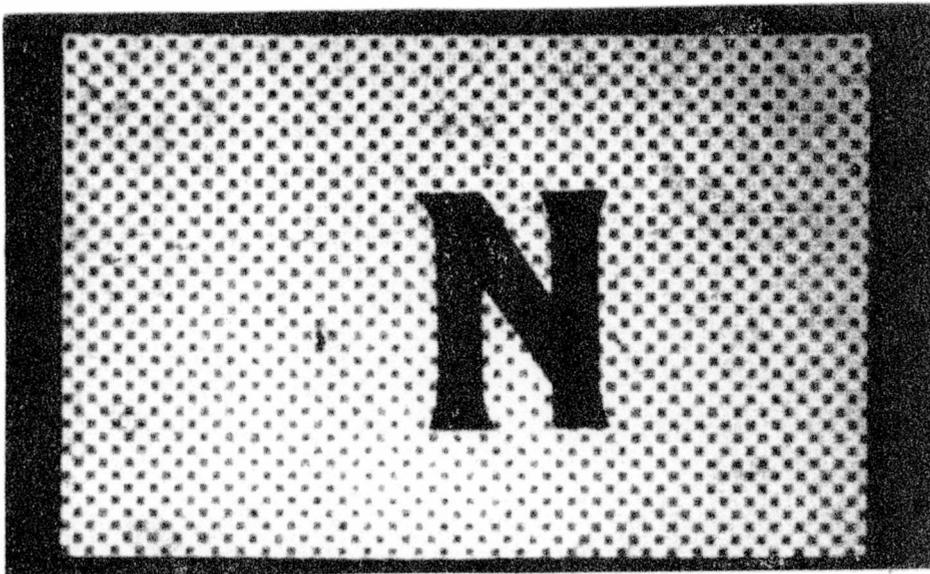
Fotografía v - 10 (b)



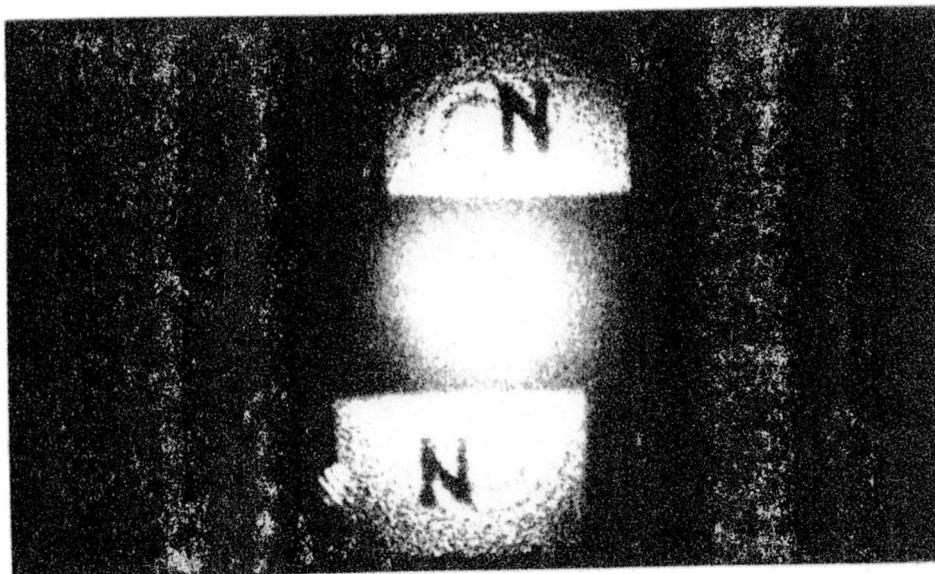
Fotografía v - 10 (c)



Fotografía v - 10 (d)



Fotografía v - 11 (a)



Fotografía v - 11 (b)

#### V-4 APLICACION AL ESTUDIO DE DEFORMACIONES.

Según se expresó en la Introducción, una de las aplicaciones que se han desarrollado con éxito es la medición de desplazamientos y deformaciones en general, usando técnicas de "speckle", o granularidad coherente, característica de la luz proveniente de un láser al incidir sobre una misma placa fotográfica.

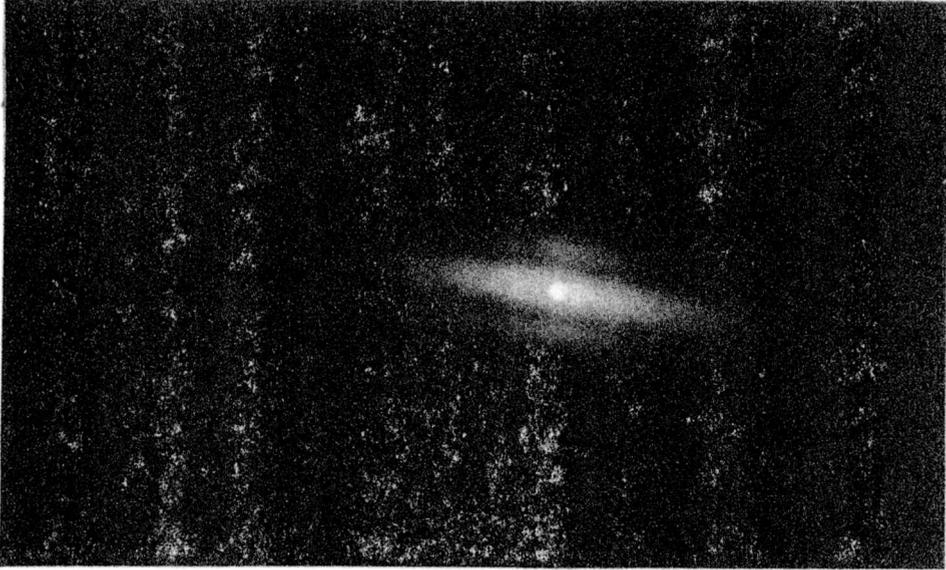
En este caso, al interponer al interferograma entre una muestra iluminada con luz monocromática y coherente, y el medio de registro fotográfico, se obtiene un holograma del objeto. Entonces, es razonable suponer que, si sobre una misma placa se realizan dos exposiciones tomando como escena al mismo objeto, pero alterando de alguna manera a la muestra entre las exposiciones, se logra, al reconstruir la imagen, la interferencia entre las dos figuras holográficas que son coherentes entre sí, siendo generadas una por cada exposición. La interferencia se debe a que las ondas de cada exposición reconstruidas difieren entre ellas, pudiéndose assimilar el hecho al proceso de registro original del holograma.

De lo expuesto, si esta experiencia es llevada a cabo con el dispositivo discutido (interferograma), se obtiene un holograma de Fourier interferométrico.

Además, como la luz utilizada en todo el proceso es coherente, es de esperar la existencia del fenómeno de "speckle", el cual, según fue explicado, producirá, debido a la doble exposición, franjas rectas en el plano focal de la lente transformadora, en el orden cero, y cuyo espaciado es proporcional a la deformación sufrida por el objeto, dando cuenta de la magnitud promedio de la misma<sup>(1)</sup>.

A modo de ejemplo, se materializó este experimento en la visualización de la deformación provocada en un espécimen, que consiste de una viga empotrada en voladizo y sometida a una carga en su extremo libre.

La foto V.12(a) muestra los resultados, en donde se aprecian, en el orden cero, las franjas rectas, y en la V.12(b), las líneas curvas, que se observan sobre una de las imágenes que no corresponda al orden cero, son



Fotografía v - 12 (a)



Fotografía v - 12 (b)

franjas que siguen los contornos de igual deformación.

La explicación de estas curvas reside en el hecho de que los puntos que sufrieron entre las exposiciones la misma deformación, tendrán igual diferencia de camino óptico, y por lo tanto el mismo estado interferencial, ya sea destructivo, constructivo o intermedio, y entonces, las líneas oscuras por ejemplo, unirán a todos aquellos puntos que han experimentado un mismo desplazamiento relativo tal que la interferencia sea totalmente destructiva.

Obviamente, aquí se conjugan la visualización de la deformación de la muestra como un todo y una medida simultánea de la misma, en promedio.

Evidentemente, este proceso brinda una interesante posibilidad, al permitir agilizar el relevamiento de datos, necesitar un mínimo de elementos ópticos y requerir condiciones de estabilidad comunes a cualquier procedimiento holográfico convencional, no restringiendo su aplicabilidad sólo al ámbito de un laboratorio especializado.

## V-5 HOLOGRAFIA CON EL INTERFEROMETRO.

En lo expuesto aún queda un punto por resaltar, y éste es el dispositivo interferométrico en sí. Existe un hecho que fue demostrado en el Capítulo IV, pero que se ha preferido posponer su discusión hasta este momento.

Concretamente se hace referencia a la Sección IV.2, en la que se realiza la transformada de Fourier del registro de interferencia y se comprueba que no es otra que un holograma de Fourier de una fuente puntual.

A diferencia de los hologramas obtenidos a partir de este registro interferencial, en los que coexisten tres imágenes del objeto original, aquí se presenta una sola imagen.

De la unión de estos elementos con los antecedentes en el tema, es fácil concluir que la cavidad descrita en el Capítulo III puede ser usada para generar hologramas de Fourier cuando sea interpuesta entre un objeto y un medio fotosensible.

Para confirmar estas suposiciones, se hace necesario conocer la respuesta impulsiva del sistema. Esto es, colocar una fuente puntual en una posición arbitraria, calcular la diferencia de camino óptico hasta un punto general de observación. para dos trayectorias cualquiera, y a partir de ésta reconstruir el diagrama total a la salida del resonador.

Pero, si bien este problema aún no ha sido encarado, un aval de lo expuesto lo constituye el siguiente experimento:

Se colocó una transparencia consistente en una carta de pruebas ópticas, que se mostró en la foto V.10(a), e iluminada por una onda plana de luz proveniente de un láser, a continuación se colocó al interferómetro y por último a una placa de registro de alta resolución.

Una vez revelado el registro, e interpuesto entre una lente (sobre la que incide una onda plana de luz coherente y monocromática) y su plano focal, se observa como resultado la foto V.13, que muestra una resolución comparable con la ya presentada , quedando de esta forma, abierta una posibilidad más de estudio.



Fotografia v - 13

## REFERENCIAS

1. Rodriguez, N., Torroba, R., Gallardo, M. y Garavaglia, M., "Medida holográfica de deformaciones utilizando un registro interferométrico", II COREND , San Miguel de Tucumán, Octubre (1981)

## CAPITULO VI

## CONCLUSIONES

El desarrollo de técnicas que faciliten y agilicen los métodos de procesamiento de imágenes, atacando sus aspectos básicos, ha sido la meta del presente trabajo.

Esto encierra el análisis de los principios fundamentales de la interferencia, fenómeno que en sí marca el punto de partida para el almacenamiento y codificación de la información transportada por la radiación electromagnética, tanto en fase como en amplitud.

El primer paso ha sido el de evitar el uso de un haz explícito de referencia, basándose en el aprovechamiento del haz objeto, mediante una división de este frente de ondas con espejos en una adecuada disposición. Sin embargo se debe tener cuidado en generar ruido óptico, el que se pondrá de manifiesto en la reconstrucción, ya sea por la aparición de múltiples imágenes como por distorsión.

Entonces, se debe diseñar un dispositivo interferencial que sea tal que las sucesivas reflexiones sigan un camino óptico que se cierre sobre sí mismo, o bien que las imágenes sean el menor número posible, a la vez que se genere una fuente puntual, necesaria para un holograma de Fourier.

La respuesta se encuentra al analizar las cavidades resonantes que confinan a los medios activos de los láseres, conocidas con el nombre de "inestables". Al estudiarlas desde el punto de vista pasivo, resulta adecuado el empleo de espejos parabólicos en disposición confocal, que bajo la iluminación de una onda plana en incidencia normal, brinda como característica la presencia de un punto de enfoque en el foco común del sistema.

Se hace necesario el estudio de la figura de interferencia que se observa a la salida de tal dispositivo, y las características que se aprecian cuando un registro fotográfico de la misma es usado como pupila de un sistema óptico, analizando su comportamiento por difracción.

En él se identifica a una distribución que conforma anillos concéntricos con el eje de la cavidad, los que al ser observados bajo la incidencia de una on-

da plana, en un montaje experimental de Fourier, producen la presencia, en el plano de las frecuencias, de un objeto puntual delante y otro atrás, situados simétricamente con respecto a la placa. Este hecho está asociado con la existencia de un holograma de Fourier de una fuente puntual, a la vez que revela poseer propiedades análogas a las de la conjunción de una lente positiva y otra negativa.

En este sentido su comportamiento recuerda al de una placa zonal, pero con ciertas diferencias que la distinguen de las clasificaciones habituales.

Conviene recalcar en este punto, que se ha comprobado uno de los propósitos enunciados en el presente trabajo, y es la concreción, mediante un sistema interferencial, de la obtención de un holograma de bajo ruido y buena eficiencia de difracción.

En general, desde el punto de vista de la holografía, la propiedad de lente negativa de la placa zonal es muy importante, pues son las ondas divergentes de los hologramas las que dan al observador la notable propiedad de visión tridimensional de la escena original.

Ahora bien, el poder sintetizar a esta lente doble constituye la clave en la que se basan las experiencias mostradas a lo largo del Capítulo V y que demuestran la validez de la teoría presentada.

Si bien la idea de usar placas zonales como substitutos de las lentes no es nueva, sí lo es el hecho de emplearlas como lentes transformadoras para la obtención de hologramas de Fourier. Ofrecen la ventaja de versatilidad, fácil manejo y brindan la posibilidad de ser construídas con la distancia focal que se desee, no contando con las aberraciones características de las lentes.

Por otro lado se podría computar como una desventaja, el hecho de que los términos que se generan al reconstruir, según se demuestra en el Capítulo IV, contienen, además del objeto original, a las dos imágenes que del mismo reproduce la placa zonal.

No obstante, se cuenta con varios grados de libertad que permiten eliminar a una de estas imágenes y en base a un juego de intensidades relativas, enmascarar la presencia de la otra, en base a la intensidad de la onda que reconstruye al objeto original.

Se demostró en el Capítulo V que si se satura la ecuación de las lentes, al poner en posición al objeto y al medio de registro, se permitía la obtención de una mejora substancial al reconstruir la escena en el plano de Fourier.

Como aplicaciones directas se discute el estudio de deformaciones para ensayos no destructivos, permitiendo trabajos con técnicas holográficas fuera del ámbito del laboratorio, revisándose actualmente la posibilidad del uso del interferograma en la holografía de Fourier con láseres de pulsos de corta duración, sin necesidad de disponer de alta potencia, puesto que al no tener presente un haz explícito de referencia se reducen los elementos ópticos convencionales, aprovechando de esta manera al máximo la potencia del laser empleado.

En general, se pudo comprobar que si el objeto es una transparencia iluminada por una onda plana, existe una componente de la misma que será difractada por el interferograma, como una onda esférica que surge del foco posterior. Este foco constituye una muy buena referencia para un holograma de Fourier, pero la relación de intensidad luminosa entre este "punto referencia" y los restantes "puntos objeto", es tal que la interferencia entre ellos se corresponde con una base en intensidad baja, por lo que se encontrarían muy cerca del orden cero del plano de las frecuencias. Es como tener la fuente de referencia centrada en el objeto.

Este hecho lleva a pensar que una solución importante se obtendría al utilizar el interferograma fuera de eje con respecto al objeto, que es análogo a emplear una fuente de referencia fuera del campo difractado por el objeto.

Así, prácticamente no habría límites a la utilización del interferograma en la holografía.

Al final del Capítulo V se presentó una prueba experimental de que el interferómetro en sí reproduce hologramas de Fourier, no contando por el momento con un aval teórico; pero la idea fundamental en la descripción de estos hologramas se centra en que en virtud de las ondas luminosas que interfieren, cada punto luminoso de la escena forma, en el proceso de registro, su propia placa zonal en la placa fotográfica.

R. 235

La respuesta impulsiva del sistema a una fuente puntual, se puede materializar experimentalmente en el MODO 2, definido en el Capítulo II, con el agregado de dispositivos correctores esfero-parabólicos. Esto último implica el desarrollo de un trabajo similar al expuesto, indicando que el tema no se agota aquí, sino que abre nuevas posibilidades de enfoque y aplicación.

La Plata, abril de 1982.